习题 (10.4.1). 计算下列 n 重积分.

(1) $\int\cdots\int_{[0,1]^n}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$, 其中

$$[0,1]^n=\underbrace{[0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]}_{n\text{个}};$$

(2) $\int\cdots\int_{[0,1]^n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_n\mathrm{d}x_n$.

解答: 我们利用线性性和对称性，将各积分化为单位立方体上的一维积分。

(1) 由线性性，

$$\int_{[0,1]^n}\sum_{i=1}^n x_i^2\,\mathrm{d}V=\sum_{i=1}^n\int_{[0,1]^n}x_i^2\,\mathrm{d}V.$$

对每个 i，积分可分离：

$$\int_{[0,1]^n}x_i^2\,\mathrm{d}V=\left(\int_0^1 x_i^2\,\mathrm{d}x_i\right)\prod_{j\neq i}\left(\int_0^1 1\,\mathrm{d}x_j\right)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

故原积分 $=n\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$。

(2) 展开平方：

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2=\sum_{i=1}^n x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j.$$

积分后，

$$\int_{[0,1]^n}x_i^2\,\mathrm{d}V=\frac{1}{3},\qquad\int_{[0,1]^n}x_ix_j\,\mathrm{d}V=\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

因此，

$$\int_{[0,1]^n}(x_1+\cdots+x_n)^2\,\mathrm{d}V=n\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{n}{3}+\frac{n(n-1)}{4}.$$

通分得 $\frac{4n+3n(n-1)}{12}=\frac{3n^2+n}{12}=\frac{n(3n+1)}{12}$。

(3) 从内到外逐次积分：

$$\int_0^{x_{n-1}}x_n\,\mathrm{d}x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}^2,$$

$$\int_0^{x_{n-2}}x_{n-1}\cdot\frac{1}{2}x_{n-1}^2\,\mathrm{d}x_{n-1}=\frac{1}{2}\int_0^{x_{n-2}}x_{n-1}^3\,\mathrm{d}x_{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x_{n-2}^4=\frac{1}{8}x_{n-2}^4,$$

$$\int_0^{x_{n-3}}x_{n-2}\cdot\frac{1}{8}x_{n-2}^4\,\mathrm{d}x_{n-2}=\frac{1}{8}\int_0^{x_{n-3}}x_{n-2}^5\,\mathrm{d}x_{n-2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}x_{n-3}^6=\frac{1}{48}x_{n-3}^6.$$

依此类推，进行 $n-1$ 次内层积分后得到

$$\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}x_1^{2n-2}=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}x_1^{2n-2}.$$

最后对外层 x_1 积分：

$$\int_0^1 x_1 \cdot \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} x_1^{2n-2}\,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\int_0^1 x_1^{2n-1}\,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2^n n!}.$$

因此积分值为 $\dfrac{1}{2^n n!}$。

习题 (10.4.2). 计算集合 $V_n = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leqslant 1,\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0\right\}$ 的体积.

解答: 作线性变换 $y_i = x_i/a_i$，即 $x_i = a_i y_i$，$i = 1, \ldots, n$。该变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \det(\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)) = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

原区域 V_n 变为

$$W = \{(y_1, \ldots, y_n) \mid y_1 + \cdots + y_n \leqslant 1,\ y_i \geqslant 0\}.$$

W 是 n 维标准单纯形，其体积为 $1/n!$（可用数学归纳法证明：当 $n = 1$ 时，区间 $[0, 1]$ 长度为 $1 = 1/1!$；假设 $n-1$ 成立，则对 y_n 积分，区域为 $y_n \in [0, 1]$，$(y_1, \ldots, y_{n-1})$ 满足 $y_1 + \cdots + y_{n-1} \leqslant 1 - y_n$，由归纳假设该区域体积为 $(1-y_n)^{n-1}/(n-1)!$，再对 y_n 从 0 到 1 积分得 $1/n!$）。因此

$$\operatorname{Vol}(V_n) = \int_{V_n} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_W |\det(J)|\,\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = (a_1 \cdots a_n) \cdot \frac{1}{n!} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}.$$

习题 (10.4.3). 设 $f(x)$ 连续，证明：

$$\int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\mathrm{d}x_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

解答: 设积分区域为

$$D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid 0 \le x_n \le x_{n-1} \le \cdots \le x_1 \le a\}.$$

将左边累次积分改写为

$$I = \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\mathrm{d}x_n = \iiint_D f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

由于被积函数仅依赖于 x_n，可先对 $x_1, \ldots, x_{n-1}$ 积分，再对 x_n 积分。交换积分次序得

$$I = \int_0^a f(x_n)\left(\iint_{x_n \le x_{n-1} \le \cdots \le x_1 \le a} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_n.$$

记 $t = x_n$，则内层积分为

$$V(t) = \int_t^a \mathrm{d}x_1 \int_t^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_t^{x_{n-2}} \mathrm{d}x_{n-1}.$$

作变量代换 $u_i = x_i - t$（$i = 1, \dots, n-1$），则积分区域变为

$$0 \le u_{n-1} \le u_{n-2} \le \cdots \le u_1 \le a - t,$$

且雅可比行列式为 1，于是

$$V(t) = \int_0^{a-t} \mathrm{d}u_1 \int_0^{u_1} \mathrm{d}u_2 \cdots \int_0^{u_{n-2}} \mathrm{d}u_{n-1}.$$

这是一个 $(n-1)$ 重累次积分，其值为单纯形

$$\{(u_1, \dots, u_{n-1}) \mid 0 \le u_{n-1} \le \cdots \le u_1 \le a - t\}$$

的体积，即 $\dfrac{(a-t)^{n-1}}{(n-1)!}$。（此结论可由归纳法或直接计算得到：对于 m 维单纯形，体积为 $(a-t)^m/m!$。）因此

$$I = \int_0^a f(t) \cdot \frac{(a-t)^{n-1}}{(n-1)!} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a f(t)(a-t)^{n-1} \,\mathrm{d}t.$$

习题 (10.4.4). 设 $f(x)$ 连续，证明：

$$\int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_n = \frac{1}{n!}\left[\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right]^n.$$

解答: 记

$$I_n = \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_n.$$

考虑 n 重积分

$$J_n = \int_{[0,a]^n} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^n.$$

超立方体 $[0,a]^n$ 可按坐标的大小顺序划分为 $n!$ 个区域。具体地，对任意排列 $\sigma \in S_n$，定义区域

$$D_\sigma = \{(x_1, \dots, x_n) : 0 \le x_{\sigma(1)} \le x_{\sigma(2)} \le \cdots \le x_{\sigma(n)} \le a\}.$$

这些区域互不相交（边界为零测集），且它们的并集等于 $[0,a]^n$。因此

$$J_n = \sum_{\sigma \in S_n} \int_{D_\sigma} f(x_1)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

注意到被积函数 $f(x_1)\cdots f(x_n)$ 关于变量对称，即对任意置换 σ 有

$$f(x_1)\cdots f(x_n) = f(x_{\sigma(1)})\cdots f(x_{\sigma(n)}).$$

对每个 σ，作变量替换 $y_i = x_{\sigma(i)}$，则 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$ 是线性变换，雅可比行列式的绝对值为 1，且变换将区域 D_σ 映为

$$D_{\mathrm{id}} = \{(y_1, \dots, y_n) : 0 \le y_n \le y_{n-1} \le \cdots \le y_1 \le a\},$$

即原来的迭代积分区域（注意顺序：$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ 等价于 $0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \cdots \leq x_1 \leq a$）。于是

$$\int_{D_\sigma} f(x_1)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{D_{\mathrm{id}}} f(y_1)\cdots f(y_n)\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n = I_n.$$

因此

$$J_n = n!\,I_n,$$

从而

$$I_n = \frac{1}{n!}\,J_n = \frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^n.$$

习题 (11.1.1). 计算下列曲线的弧长.

(1) $r(t) = \mathrm{e}^t\cos t\mathbf{i} + \mathrm{e}^t\sin t\mathbf{j} + \mathrm{e}^t\mathbf{k}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

(3) $x = a\cos t, y = a\sin t, z = a\ln(\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4})$;

(5) $4ax = (y+z)^2$ 与 $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$ 的交线，由原点到点 $M(x,y,z)(a > 0, z \geqslant 0)$.

解答:

(1). 曲线 $\boldsymbol{r}(t) = \mathrm{e}^t\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{e}^t\sin t\,\mathbf{j} + \mathrm{e}^t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
弧长 $L = \int_0^{2\pi}\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t$. $\boldsymbol{r}'(t) = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)$, $\|\boldsymbol{r}'(t)\| = \mathrm{e}^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \mathrm{co}$
$\mathrm{e}^t\sqrt{3}$. 故 $L = \sqrt{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)$.

(2). $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = a\ln(\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.
$\boldsymbol{r}'(t) = (-a\sin t,\, a\cos t,\, -a\tan t)$, $\|\boldsymbol{r}'(t)\| = a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \tan^2 t} = a\sqrt{1 + \tan^2 t} = a\sec t$. 弧长 $L = a\int_0^{\pi/4}\sec t\,\mathrm{d}t = a\big[\ln(\sec t + \tan t)\big]_0^{\pi/4} = a\ln(1+\sqrt{2})$.

(3). 两曲面 $4ax = (y+z)^2$ 与 $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$ 交线，由原点至点 $M(x,y,z)$，其中 $a > 0$, $z \geqslant 0$.
取参数 $u = \sqrt{ax}$（即 $x = \dfrac{u^2}{a}$），由第一方程（取 $y + z = 2\sqrt{ax} = 2u$）及第二方程消去 z 得参数化：

$$x = \frac{u^2}{a}, \quad y = u - \frac{u^3}{3a^2}, \quad z = u + \frac{u^3}{3a^2}.$$

则 $\boldsymbol{r}'(u) = \left(\dfrac{2u}{a}, 1 - \dfrac{u^2}{a^2}, 1 + \dfrac{u^2}{a^2}\right)$,$\|\boldsymbol{r}'(u)\| = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{u^2}{a^2}\right)$. 弧长微元 $\mathrm{d}s = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{u^2}{a^2}\right)\mathrm{d}u$，而 $\mathrm{d}z = \left(1 + \dfrac{u^2}{a^2}\right)\mathrm{d}u$，故 $\mathrm{d}s = \sqrt{2}\,\mathrm{d}z$。由 $u = 0$ 时 $z = 0$，积分得从原点到 M 的弧长 $s = \sqrt{2}\,z$（z 为 M 点的 z 坐标）。

习题 (11.1.2). 计算下列曲线积分.

(1) $\int_L y^2\,\mathrm{d}s, L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

(3) $\int_L (x+y)\,\mathrm{d}s, L:$ 顶点为 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 的三角形周界;

(5) $\int_L (x+y+z)\,\mathrm{d}s, L$ 由直线段 $AB: A(1,1,0), B(1,0,0)$ 及螺线 $BC: x = \cos t, y = \sin t, z = t\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 组成;

(7) $\int_L x\,\mathrm{d}s, L:$ 对数螺线 $r = ae^{k\varphi}\,(k > 0)$ 在圆 $r = a$ 内的那一段;

(9) $\int_L x\sqrt{x^2 - y^2}\,\mathrm{d}s, L:$ 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\,(x \geqslant 0)$ 的一半;

(11) $\int_L x^2\,\mathrm{d}s, L:$ 圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$;

解答:

(1). 摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(1-\cos t),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a\sin t,$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t=2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

$$y=a(1-\cos t)=2a\sin^2\frac{t}{2},\qquad y^2=4a^2\sin^4\frac{t}{2}.$$

$$\int_L y^2\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}4a^2\sin^4\frac{t}{2}\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

令 $u=t/2$，$\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}u$，

$$8a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\cdot 2\,\mathrm{d}u=16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\,\mathrm{d}u.$$

$$\int_0^{\pi}\sin^5 u\,\mathrm{d}u=2\int_0^{\pi/2}\sin^5 u\,\mathrm{d}u=2\cdot\frac{8}{15}=\frac{16}{15},$$

故

$$\int_L y^2\,\mathrm{d}s=16a^3\cdot\frac{16}{15}=\frac{256a^3}{15}.$$

(2). 三角形周界由三条直线段组成。

- OA：从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$，参数 $x=t,\ y=0\ (0\le t\le 1)$，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$，

$$\int_{OA}(x+y)\,\mathrm{d}s=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

- AB：从 $(1,0)$ 到 $(0,1)$，参数 $x=1-t,\ y=t\ (0\le t\le 1)$，$\mathrm{d}s=\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$，

$$\int_{AB}(x+y)\,\mathrm{d}s=\int_0^1(1-t+t)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}.$$

- BO：从 $(0,1)$ 到 $(0,0)$，参数 $x=0,\ y=1-t\ (0\le t\le 1)$，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$，

$$\int_{BO}(x+y)\,\mathrm{d}s=\int_0^1(1-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

总和为

$$\int_L(x+y)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}=1+\sqrt{2}.$$

(3). 路径由直线段 AB 与螺线 BC 组成。

- AB：从 $A(1,1,0)$ 到 $B(1,0,0)$，参数 $x=1,\ y=1-t,\ z=0\ (0\le t\le 1)$，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$，

$$\int_{AB}(x+y+z)\,\mathrm{d}s=\int_0^1(1+1-t+0)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(2-t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}.$$

- BC：螺线 $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ (0\le t\le 2\pi)$，$\mathrm{d}s=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$，

$$\int_{BC}(x+y+z)\,\mathrm{d}s=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(0+0+\frac{(2\pi)^2}{2}\right)=2\pi^2\sqrt{2}.$$

故

$$\int_L(x+y+z)\,\mathrm{d}s=\frac{3}{2}+2\pi^2\sqrt{2}.$$

(4). 对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{k\varphi}$ $(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的部分对应 $\varphi\le 0$（与圆交于 $\varphi=0$）。

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\varphi=\sqrt{a^2\mathrm{e}^{2k\varphi}+a^2k^2\mathrm{e}^{2k\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi=a\mathrm{e}^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

$x=r\cos\varphi=a\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi$，

$$\int_L x\,\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^0 a\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi\cdot a\mathrm{e}^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{d}\varphi=a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{2k\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

$$\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{2k\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{2k}{4k^2+1},$$

故

$$\int_L x\,\mathrm{d}s=a^2\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2k}{4k^2+1}=\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1}.$$

(5). 双纽线极坐标方程 $r^2=a^2\cos 2\theta$，取右半支 $x\ge 0$ 对应 $\theta\in[-\pi/4,\pi/4]$。

$$\mathrm{d}s=\frac{a^2}{r}\,\mathrm{d}\theta,\qquad x=r\cos\theta,\qquad \sqrt{x^2-y^2}=\frac{r^2}{a},$$

$$x\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}s=r\cos\theta\cdot\frac{r^2}{a}\cdot\frac{a^2}{r}\,\mathrm{d}\theta=ar^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=a^3\cos 2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

$$\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}s=a^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2a^3\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

由 $\cos 2\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)$，得

$$2a^3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\cos 3\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=a^3\left[\frac{1}{3}\sin 3\theta+\sin\theta\right]_0^{\pi/4}=a^3\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3.$$

故

$$\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}s=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3.$$

(6). 曲线 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，为半径为 a 的圆。由对称性（轮换 x,y,z 不改变曲线），

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s=\int_L y^2\,\mathrm{d}s=\int_L z^2\,\mathrm{d}s.$$

故

$$3\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = a^2\int_L \mathrm{d}s = a^2\cdot(2\pi a) = 2\pi a^3,$$

因此

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

习题 (11.1.3). 求曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 从 $t=0$ 到任意点间那段弧的质量，设它各点的密度与该点到原点的距离平方成反比，且在点 $(1,0,1)$ 处的密度为 1.

解答: 设曲线参数方程为

$$x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t,\quad z=e^t,\quad t\geq 0.$$

1. 确定密度函数点 (x,y,z) 到原点的距离平方为

$$r^2=x^2+y^2+z^2=e^{2t}(\cos^2 t+\sin^2 t)+e^{2t}=2e^{2t}.$$

密度与 r^2 成反比，设 $\rho=k/r^2$。已知点 $(1,0,1)$ 处 $\rho=1$，该点对应 $t=0$，此时 $r^2=2$，故

$$1=\frac{k}{2}\Rightarrow k=2.$$

因此

$$\rho=\frac{2}{r^2}=\frac{2}{2e^{2t}}=e^{-2t}.$$

2. 计算弧长微元求导数：

$$\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t),\quad \frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t),\quad \frac{dz}{dt}=e^t.$$

弧长微元

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

计算平方和：

$$(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1=(1-\sin 2t)+(1+\sin 2t)+1=3,$$

故

$$ds=\sqrt{3}\,e^t dt.$$

3. 质量积分质量微元

$$dm=\rho\,ds=e^{-2t}\cdot\sqrt{3}\,e^t dt=\sqrt{3}\,e^{-t}dt.$$

从 $t=0$ 到任意 $t=T$ 的弧段质量为

$$M(T)=\int_0^T\sqrt{3}\,e^{-t}dt=\sqrt{3}\left[-e^{-t}\right]_0^T=\sqrt{3}(1-e^{-T}).$$

记参数为 t，即

$$M(t)=\sqrt{3}\,(1-e^{-t}).$$

此即为所求的质量函数。

习题 (11.2.1). 求下列曲面在指定部分的面积.

(2) 柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0, x-z=0$ $(x>0, y>0)$ 所截的部分;

(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 和抛物面 $x^2+y^2=2az$ $(z\geqslant 0)$ 所围成的立体的全表面;

(6) 锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被 Oxy 平面和平面 $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ 所截下的部分;

(8) 曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$ 的全部.

解答: 采用柱面参数 $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ z=z$，其中 $\theta\in[0,\pi/2]$（$x>0,y>0$）。由平面条件得 $-a\cos\theta\leqslant z\leqslant a\cos\theta$。面积微元 $\mathrm{d}S=a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$，故

$$S=\int_0^{\pi/2}\int_{-a\cos\theta}^{a\cos\theta}a\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta=a\int_0^{\pi/2}2a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2a^2.$$

(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 和抛物面 $x^2+y^2=2az$（$z\geqslant 0$）所围成立体的全表面

联立得 $z^2+2az-3a^2=0\Rightarrow z=a$（$z\geqslant 0$），交线为 $x^2+y^2=2a^2$。立体由球面 $z\geqslant a$ 的部分（球冠）和抛物面 $0\leqslant z\leqslant a$ 的部分构成，投影区域均为 $D: x^2+y^2\leqslant 2a^2$。球面部分 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$：$\mathrm{d}S_1=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-r^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，极坐标下

$$S_1=\iint_D\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-r^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\sqrt{3}a\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{3a^2-r^2}}=2\pi\sqrt{3}a\big[-\sqrt{3a^2-r^2}\big]_0^{\sqrt{2}a}=2\pi a^2(3-\sqrt{3}).$$

抛物面部分 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2a}$：$\mathrm{d}S_2=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，极坐标下

$$S_2=\iint_D\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{a}\int_0^{\sqrt{2}a}r\sqrt{a^2+r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{1}{3}\big[(a^2+2a^2)^{3/2}-a^3\big]=\frac{2\pi}{3}a^2(3\sqrt{3}-1).$$

全表面面积

$$S=S_1+S_2=2\pi a^2(3-\sqrt{3})+\frac{2\pi}{3}a^2(3\sqrt{3}-1)=2\pi a^2\left(3-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{16\pi a^2}{3}.$$

(6) 锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被 Oxy 平面和平面 $z=\sqrt{2}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$ 所截下的部分

取上半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$z\geqslant 0$）。由 $z\leqslant\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ 得 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$，平方整理为 $(x-2)^2+2y^2\leqslant 8$，即投影区域 $D:\dfrac{(x-2)^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1$。锥面上 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，故 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$。面积

$$S=\iint_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\cdot\mathrm{Area}(D).$$

椭圆 D 半长轴 $2\sqrt{2}$，半短轴 2，面积 $\pi\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2=4\sqrt{2}\pi$，因此 $S=\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\pi=8\pi$.

(8) 曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$ 的全部

采用球坐标 $x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\varphi$，代入得

$$\rho^4=2a^2\rho^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\ \Rightarrow\ \rho^2=a^2\sin^2\varphi\sin 2\theta\ (\rho\geqslant 0),$$

且需 $\sin 2\theta \geqslant 0$，故 $\varphi \in [0,\pi]$, $\theta \in [0,\pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$。曲面参数为 $\rho = a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}$。计算面积微元：由参数化 $\boldsymbol{r}(\varphi,\theta) = \rho(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$，可得

$$|\boldsymbol{r}_\varphi \times \boldsymbol{r}_\theta| = \rho\sqrt{\sin^2\varphi(\rho^2+\rho_\varphi^2)+\rho_\theta^2} = a^2\sin^2\varphi,$$

故 $\mathrm{d}S = a^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$。面积

$$S = \iint a^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = a^2\left(\int_{\theta\text{允许区间}}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^\pi \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right) = a^2\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2a^2}{2}.$$