习题 (10.2.6). 设 $f(x)$ 为连续的奇函数，证明：

$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} \mathrm{e}^{f(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 2.$$

解答: 设 $u = x + y$, $v = x - y$, 则

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = \frac{u-v}{2},$$

Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2},$$

故 $|\partial(x,y)/\partial(u,v)| = 1/2$, 从而 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

条件 $|x| + |y| \leq 1$ 化为

$$\left|\frac{u+v}{2}\right| + \left|\frac{u-v}{2}\right| \leq 1 \iff \frac{|u+v| + |u-v|}{2} \leq 1.$$

利用恒等式 $\max(|u|,|v|) = \frac{|u+v|+|u-v|}{2}$, 上式等价于

$$\max(|u|,|v|) \leq 1,$$

即正方形 $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$. 因此积分区域变换为 $[-1,1] \times [-1,1]$.

由于 $f(x+y) = f(u)$, 二重积分化为

$$I = \iint_{|x|+|y|\leq 1} e^{f(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_{|u|\leq 1,\,|v|\leq 1} e^{f(u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

先对 v 积分得 $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}v = 2$, 故

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{f(u)} \cdot 2\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} e^{f(u)}\,\mathrm{d}u.$$

将积分在 0 处分开:

$$\int_{-1}^{1} e^{f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^{0} e^{f(u)}\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{1} e^{f(u)}\,\mathrm{d}u.$$

对第一个积分作代换 $u = -t$ ($\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, 上下限变为 $t = 1$ 到 0):

$$\int_{-1}^{0} e^{f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{1}^{0} e^{f(-t)}(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{1} e^{f(-t)}\,\mathrm{d}t.$$

由 f 为奇函数, $f(-t) = -f(t)$, 因此

$$\int_{-1}^{0} e^{f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{1} e^{-f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

于是

$$I = \int_{0}^{1} \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)}\right)\mathrm{d}t.$$

对任意实数 a, 由均值不等式得

$$e^a + e^{-a} \geq 2,$$

等号成立当且仅当 $a = 0$. 取 $a = f(t)$ 得

$$e^{f(t)} + e^{-f(t)} \geq 2 \quad (\forall t \in [0,1]).$$

积分即得

$$I = \int_0^1 \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)}\right) \mathrm{d}t \geq \int_0^1 2 \, \mathrm{d}t = 2.$$

因此

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} e^{f(x+y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \geq 2.$$

习题 (10.2.7). 设 $f(t)$ 为连续函数，求证：

$$\iint_D f(x-y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-A}^{A} f(t)(A - |t|) \, \mathrm{d}t,$$

其中 $D : |x| \leqslant \frac{A}{2}, |y| \leqslant \frac{A}{2}, A > 0$ 为常数。

解答: 令

$$u = x - y, \qquad v = y,$$

则 $x = u + v$, $y = v$。雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

因此 $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$。

正方形区域 $D : |x| \leq A/2$, $|y| \leq A/2$ 在 (u,v) 平面中变为

$$|u + v| \leq \frac{A}{2}, \qquad |v| \leq \frac{A}{2}.$$

于是二重积分化为

$$\iint_D f(x-y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{|v|\leq A/2,\, |u+v|\leq A/2} f(u) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

对于固定的 u，变量 v 必须同时满足

$$-\frac{A}{2} \leq v \leq \frac{A}{2}, \qquad -\frac{A}{2} \leq u + v \leq \frac{A}{2} \iff -\frac{A}{2} - u \leq v \leq \frac{A}{2} - u.$$

因此 v 位于两个区间的交集中：

$$I_1 = \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right], \qquad I_2 = \left[-\frac{A}{2} - u, \frac{A}{2} - u\right].$$

两个长度均为 A 且中心分别为 0 和 $-u$ 的区间的交集长度为

$$\text{length}(I_1 \cap I_2) = \begin{cases} A - |u|, & |u| \le A, \\ 0, & |u| > A. \end{cases}$$

因此，对每个 u，当 $|u| \le A$ 时 v 的积分贡献因子 $A - |u|$，否则为零。对 u 积分得

$$\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-A}^{A} f(u)\,(A - |u|)\,\mathrm{d}u.$$

将积分变量重命名为 t 即得所需等式：

$$\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-A}^{A} f(t)(A - |t|)\,\mathrm{d}t.$$

习题 (10.3.1). 计算下列三重积分。
(1) $\iiint_V xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V：由 $1 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$ 围成；
(3) $\iiint_V y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V：由 $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$ 围成；

解答:
(1). 积分区域是长方体，积分可分解为：

$$\iiint_V xy\,dx\,dy\,dz = \left(\int_1^2 x\,dx\right)\left(\int_{-2}^1 y\,dy\right)\left(\int_0^{1/2} 1\,dz\right).$$

计算各积分：

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{3}{2}, \qquad \int_{-2}^1 y\,dy = -\frac{3}{2}, \qquad \int_0^{1/2} 1\,dz = \frac{1}{2}.$$

因此三重积分为 $\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{8}$。
(2). 区域 V 由 $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$ 围成。在 xz 平面内，z 从 0 到 $\frac{\pi}{2} - x$，$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$；对于每个 (x, z)，y 从 0 到 $\sqrt{x}$。因此

$$\iiint_V y\cos(x+z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{\pi/2-x} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\cos(x+z)\,dy\,dz\,dx.$$

先对 y 积分：

$$\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy = \frac{x}{2}.$$

于是积分化为

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{\pi/2-x} \frac{x}{2}\cos(x+z)\,dz\,dx.$$

再对 z 积分：令 $u = x + z$，则 $du = dz$，积分限 $u = x$ 到 $u = \pi/2$。因此

$$\int_{z=0}^{\pi/2-x} \cos(x+z)\,dz = \int_{u=x}^{\pi/2} \cos u\,du = 1 - \sin x.$$

于是内层二重积分为 $\frac{x}{2}(1-\sin x)$。剩余积分为

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{2}(1-\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx.$$

计算：

$$\int_0^{\pi/2} x\,dx = \frac{\pi^2}{8},$$
$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = 1.$$

因此

$$\iiint_V y\cos(x+z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right) = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

习题 (10.3.2). 计算下列积分值.

(2) $\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$;

(4) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\mathrm{d}z$.

解答:

(2). 采用球坐标变换：令 $x=\rho\sin\varphi\cos\theta$，$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$，$z=\rho\cos\varphi$，积分区域为上半球 $0\le\rho\le R$，$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$，$0\le\theta\le 2\pi$，被积函数 $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\varphi$，体积元 $\mathrm{d}V=\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$。积分化为

$$I_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R\rho^4\,\mathrm{d}\rho.$$

计算得

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{3},$$
$$\int_0^R\rho^4\,\mathrm{d}\rho=\frac{R^5}{5},$$

故

$$I_2=2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

(2). 采用柱坐标变换：令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$，区域：$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$0\le r\le 1$，且对每个 (r,θ) 有 z 从 r 到 $\sqrt{2-r^2}$。积分

$$I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2\,\mathrm{d}z.$$

先求内层积分：

$$\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 \,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\left[(2-r^2)^{3/2} - r^3\right].$$

于是

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 \left[r(2-r^2)^{3/2} - r^4\right]\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{6}\left(\int_0^1 r(2-r^2)^{3/2}\,\mathrm{d}r - \int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r\right). \end{aligned}$$

计算

$$\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r = \frac{1}{5},$$
$$\int_0^1 r(2-r^2)^{3/2}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{3/2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{5}(4\sqrt{2}-1),$$

所以

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{\pi}{6}\left(\frac{4\sqrt{2}-1}{5} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{4\sqrt{2}-2}{5} \\ &= \frac{\pi(2\sqrt{2}-1)}{15}. \end{aligned}$$

习题 (10.3.3). 计算下列三重积分.

(1) $\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V$：由 $x^2+y^2=2z, z=2$ 围成；

(3) $\iiint_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V$：由 $\sqrt{4-x^2-y^2}=z, x^2+y^2=3z$ 围成；

(5) $\iiint_V x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V$ 是由曲面 $z=y^2, z=4y^2\,(y>0)$ 及平面 $z=x, z=2x, z=1$ 所围的区域；

(7) $\iiint_V \mathrm{e}^{|z|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V$：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$；

解答:

(1). 区域由抛物面 $x^2+y^2=2z$ 和平面 $z=2$ 围成。采用柱坐标：

$$\begin{gathered} x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z, \\ x^2+y^2 = r^2, \qquad \mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z. \end{gathered}$$

区域为 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant 2$, $0\leqslant r\leqslant\sqrt{2z}$。

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{2z}} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_0^2\int_0^{\sqrt{2z}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

内积分为

$$\int_0^{\sqrt{2z}} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{(\sqrt{2z})^4}{4} = z^2.$$

于是 $\int_0^2 z^2\,\mathrm{d}z = \frac{8}{3}$。因此

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3}.$$

(3). 区域由半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ 围成。它们的交线为 $r=\sqrt{3}$, $z=1$。在柱坐标下，

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} z\,r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

内层 z 积分给出

$$\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\big[(\sqrt{4-r^2})^2 - (\tfrac{r^2}{3})^2\big] = \frac{1}{2}\big(4-r^2-\tfrac{r^4}{9}\big).$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} r\cdot\frac{1}{2}\big(4-r^2-\tfrac{r^4}{9}\big)\,\mathrm{d}r\\ &= \pi\int_0^{\sqrt{3}}\big(4r-r^3-\tfrac{r^5}{9}\big)\,\mathrm{d}r\\ &= \pi\Big[2r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{54}\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= \pi\Big(6-\frac{9}{4}-\frac{27}{54}\Big) = \pi\cdot\frac{13}{4} = \frac{13\pi}{4}.\end{aligned}$$

(5). 区域 V 由 $y^2\leqslant z\leqslant 4y^2$（$y>0$），$x\leqslant z\leqslant 2x$ 以及 $z\leqslant 1$ 确定。引入新变量

$$a=\frac{z}{x},\qquad b=\frac{z}{y^2},\qquad z=z,$$

于是 $x=\dfrac{z}{a}$，$y=\sqrt{\dfrac{z}{b}}$。区域变换为 $1\leqslant a\leqslant 2$，$1\leqslant b\leqslant 4$，$0\leqslant z\leqslant 1$。Jacobi 行列式为

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,z)}\right| = \frac{z^{3/2}}{2a^2b^{3/2}}.$$

被积函数变为 $x^2=z^2/a^2$。因此

$$\begin{aligned}\iiint_V x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{a=1}^2\int_{b=1}^4\int_{z=0}^1 \frac{z^2}{a^2}\cdot\frac{z^{3/2}}{2a^2b^{3/2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a\\ &= \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\mathrm{d}a}{a^4}\int_1^4\frac{\mathrm{d}b}{b^{3/2}}\int_0^1 z^{7/2}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

计算各因子：

$$\int_1^2 a^{-4}\,\mathrm{d}a=\left[-\frac{1}{3a^3}\right]_1^2=\frac{7}{24},$$
$$\int_1^4 b^{-3/2}\,\mathrm{d}b=\left[-2b^{-1/2}\right]_1^4=1,$$
$$\int_0^1 z^{7/2}\,\mathrm{d}z=\frac{2}{9}.$$

将这些相乘并乘以 $\frac{1}{2}$ 得到

$$\iiint_V x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{24}\cdot 1\cdot\frac{2}{9}=\frac{7}{216}.$$

(7). 区域为单位球 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$。采用球坐标：

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\varphi,$$
$$\mathrm{d}V=\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $0\leqslant\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。此时 $|z|=\rho|\cos\varphi|$。于是

$$\begin{aligned}\iiint_V \mathrm{e}^{|z|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{\rho|\cos\varphi|}\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\&=2\pi\int_0^{\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{\rho|\cos\varphi|}\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

由对称性，

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\rho|\cos\varphi|}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{\rho\cos\varphi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

令 $u=\cos\varphi$（$\mathrm{d}u=-\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$）：

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{\rho\cos\varphi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\int_1^0\mathrm{e}^{\rho u}(-\mathrm{d}u)=\int_0^1\mathrm{e}^{\rho u}\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{e}^{\rho}-1}{\rho}.$$

因此 φ 积分结果为 $2\dfrac{\mathrm{e}^{\rho}-1}{\rho}$，三重积分化为

$$\begin{aligned}\iiint_V \mathrm{e}^{|z|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=2\pi\int_0^1\rho^2\cdot 2\frac{\mathrm{e}^{\rho}-1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\\&=4\pi\int_0^1\rho(\mathrm{e}^{\rho}-1)\,\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

现在

$$\int_0^1\rho\mathrm{e}^{\rho}\,\mathrm{d}\rho=\left[\rho\mathrm{e}^{\rho}-\mathrm{e}^{\rho}\right]_0^1=1,\qquad\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2},$$

所以 $\displaystyle\int_0^1\rho(\mathrm{e}^{\rho}-1)\,\mathrm{d}\rho=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$。因此积分值为 $4\pi\cdot\frac{1}{2}=2\pi$。

习题 (10.3.4). 利用对称性求下列三重积分.

(1) $\iiint_V (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V$：由 $z=1-x^2-y^2$ 和 $z=0$ 围成；

(3) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V: x^2+y^2+z^2 \leqslant x$；

(5) $\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$;

解答:

(1). 区域 V 由抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 和平面 $z=0$ 围成。V 在 xy 平面上的投影为圆盘 $x^2+y^2 \le 1$，因此 V 关于 yz 平面 $(x=0)$ 和 xz 平面 $(y=0)$ 均对称。被积函数 $x+y$ 关于 x 为奇函数（x 项），关于 y 也为奇函数（y 项）。由对称性，奇函数在对称区域上的积分为零，故

$$\iiint_V (x+y)\,dx\,dy\,dz = 0.$$

(3). 区域 $V: x^2+y^2+z^2 \le x$ 是半径为 $\frac{1}{2}$、球心在 $(\frac{1}{2},0,0)$ 的球体。被积函数 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 是点到原点的距离，在坐标旋转下不变。将球体旋转使球心位于 z 轴正半轴，积分值不变。选择旋转将 $(1,0,0)$ 映到 $(0,0,1)$，则区域变为 $x^2+y^2+z^2 \le z$，即半径为 $\frac{1}{2}$、从 z 轴正方向与原点相切的球体。

在球坐标下计算：

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta, \quad dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

不等式 $x^2+y^2+z^2 \le z$ 化为 $r^2 \le r\cos\theta$，即 $r \le \cos\theta$，且 $\cos\theta \ge 0$，故 $\theta \in [0,\pi/2]$，$\phi \in [0,2\pi]$。于是

$$\begin{aligned}\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3\,dr.\end{aligned}$$

内层积分：$\int_0^{\cos\theta} r^3\,dr = \frac{1}{4}\cos^4\theta$。$\theta$ 积分：

$$\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cdot\frac{1}{4}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

乘以 $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ 得 $2\pi\cdot\frac{1}{20} = \frac{\pi}{10}$。故原积分为 $\pi/10$。

(5). 区域 $V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$ 是半轴为 a,b,c 的椭球。作变量代换

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{b}, \quad w = \frac{z}{c}, \quad dx\,dy\,dz = abc\,du\,dv\,dw.$$

区域变为单位球 $u^2+v^2+w^2 \le 1$，被积函数变为 $\sqrt{1-u^2-v^2-w^2}$。于是

$$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz = abc\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}\sqrt{1-u^2-v^2-w^2}\,du\,dv\,dw.$$

在 (u,v,w) 中采用球坐标：

$$u = \rho\sin\theta\cos\phi, \quad v = \rho\sin\theta\sin\phi, \quad w = \rho\cos\theta, \quad du\,dv\,dw = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

积分限 $\rho\in[0,1]$, $\theta\in[0,\pi]$, $\phi\in[0,2\pi]$，得

$$abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi=abc\left(\int_0^{2\pi}d\phi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\right).$$

角度部分为 $2\pi\cdot 2=4\pi$。径向积分 $\int_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho=\frac{\pi}{16}$（令 $\rho=\sin\tau$）。因此

$$\iiint_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz=abc\cdot 4\pi\cdot\frac{\pi}{16}=\frac{\pi^2}{4}abc.$$

习题 (10.3.5). 计算下列曲面围成立体的体积.

(1) $y=0,z=0,3x+y=6,3x+2y=12,x+y+z=6$;

(3) $z^2+x^2=1$ 和 $x+y+z=3,y=0$;

(5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,z=xy$ (在第一卦限部分);

(7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ (含 z 轴部分);

解答:

(1). 曲面：$y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$, $x+y+z=6$. 立体在 xy 平面上的投影区域 D 由 $y=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$ 围成，为顶点 $(2,0)$, $(4,0)$, $(0,6)$ 的三角形。顶部曲面为 $z=6-x-y$，底部为 $z=0$。体积

$$V=\iint_D(6-x-y)\,dA.$$

将积分区域分割：$x\in[0,2]$ 时 y 从 $6-3x$ 到 $6-\frac{3}{2}x$；$x\in[2,4]$ 时 y 从 0 到 $6-\frac{3}{2}x$。计算得

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=6-3x}^{6-\frac{3}{2}x}(6-x-y)\,dy\,dx=5,\qquad\int_{x=2}^{4}\int_{y=0}^{6-\frac{3}{2}x}(6-x-y)\,dy\,dx=7,$$

故 $V=5+7=12$。

(2). 曲面：$z^2+x^2=1$（圆柱面）、$x+y+z=3$、$y=0$。立体为圆柱 $x^2+z^2\le 1$ 内介于平面 $y=0$ 和 $y=3-x-z$ 之间的部分。对任意 (x,z) 满足 $x^2+z^2\le 1$ 恒有 $3-x-z>0$，故

$$V=\iint_{x^2+z^2\le 1}(3-x-z)\,dx\,dz.$$

由对称性 $\iint x\,dx\,dz=\iint z\,dx\,dz=0$，因而

$$V=3\cdot\pi\cdot 1^2=3\pi.$$

(3). 曲面：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$（椭圆柱面）、$z=xy$，第一卦限部分。立体为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1$ 在第一象限内介于 $z=0$ 和 $z=xy$ 之间的区域。

$$V=\iint_D xy\,dA,\quad D=\left\{(x,y)\middle|x\ge 0,\ y\ge 0,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}.$$

令 $x = 3u,\ y = 2v$，则 $u^2 + v^2 \le 1,\ u, v \ge 0$，$dA = 6\,du\,dv$，

$$V = \iint_{u^2+v^2\le 1,\ u,v\ge 0} (3u)(2v)\cdot 6\,du\,dv = 36\iint uv\,du\,dv.$$

极坐标 $u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta$，

$$V = 36\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\cdot r\,dr\,d\theta = 18\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr = 18\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

(4). 曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（椭球），$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$（锥面，含 z 轴部分）。立体为椭球内同时位于锥面内部（即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{z^2}{c^2}$）的部分。由对称性，先求上半部分（$z\ge 0$）再乘以 2。上半部分中，对于固定的 (x,y)，z 从锥面 $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ 到椭球面 $z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$，该区域要求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{1}{2}$。在 XY 平面作变换 $X=\frac{x}{a}$, $Y=\frac{y}{b}$，则 $dA = ab\,dX\,dY$，

$$V_+ = c\iint_{X^2+Y^2\le\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-(X^2+Y^2)}-\sqrt{X^2+Y^2}\right)ab\,dX\,dY.$$

极坐标 $X = r\cos\theta,\ Y = r\sin\theta$，

$$V_+ = abc\int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)r\,dr\,d\theta = 2\pi abc\left(\int_0^{1/\sqrt{2}} r\sqrt{1-r^2}\,dr - \int_0^{1/\sqrt{2}} r^2\,dr\right).$$

计算得

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} r\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{1}{3}-\frac{1}{6\sqrt{2}},\qquad \int_0^{1/\sqrt{2}} r^2\,dr = \frac{1}{6\sqrt{2}},$$

所以

$$V_+ = 2\pi abc\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi}{3}abc\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

总体积

$$V = 2V_+ = \frac{4\pi}{3}abc\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$