习题 (10.1.1). 改变下列积分的顺序.

(1) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{0}^{a}\mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$;

(5) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$;

解答:

(1). 积分区域是上半单位圆盘:

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$$

交换积分次序得

$$\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$$

(2). 积分区域是上半圆盘，中心在 $(a,0)$，半径为 a:

$$\int_{0}^{a}dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx$$

交换积分次序得

$$\int_{0}^{2a}dx\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)dy.$$

(3). 两个积分之和的积分区域是顶点为 $(0,0)$、$(1,1)$、$(2,0)$ 的三角形:

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{x}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{2-x}f(x,y)dy\\&=\int_{0}^{1}dy\int_{y}^{2-y}f(x,y)dx.\end{aligned}$$

习题 (10.1.2). 计算下列积分.

(3) $\iint_D\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D$ 由 $y=\pi,x=y,x=0$ 围成;

(5) $\iint_D(x+y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D$ 由 $y=x,y=x+a,y=a,y=3a$ 围成;

(7) $\iint_D\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D$ 由 $x=2,y=x$ 及 $xy=1$ 围成;

解答:

(3). 区域 D 由 $x=0$, $x=y$, $y=\pi$ 围成。对于 $0\le y\le\pi$, x 从 0 到 y。因此

$$\iint_D\cos(x+y)\,dx\,dy=\int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{y}\cos(x+y)\,dx\,dy.$$

内层积分为

$$\int_{0}^{y}\cos(x+y)\,dx=\sin(x+y)\Big|_{x=0}^{x=y}=\sin(2y)-\sin(y).$$

于是二重积分化为

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\big(\sin(2y)-\sin(y)\big)\,dy &= \Big[-\frac{1}{2}\cos(2y)+\cos y\Big]_0^{\pi}\\ &= \Big(-\frac{1}{2}\cos 2\pi+\cos\pi\Big)-\Big(-\frac{1}{2}\cos 0+\cos 0\Big)\\ &= \Big(-\frac{1}{2}-1\Big)-\Big(-\frac{1}{2}+1\Big)=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2.\end{aligned}$$

(3). 区域 D 由 $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ 围成（其中 $a>0$）。对于 $a\le y\le 3a$, x 从 $y-a$ 到 y。因此

$$\iint_D (x+y-1)\,dx\,dy=\int_{y=a}^{3a}\int_{x=y-a}^{y}(x+y-1)\,dx\,dy.$$

计算内层积分:

$$\begin{aligned}\int_{y-a}^{y}(x+y-1)\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}+(y-1)x\right]_{x=y-a}^{x=y}\\ &= \left(\frac{y^2}{2}+(y-1)y\right)-\left(\frac{(y-a)^2}{2}+(y-1)(y-a)\right)\\ &= 2ay-\frac{a^2}{2}-a.\end{aligned}$$

再对 y 积分:

$$\begin{aligned}\int_a^{3a}\left(2ay-\frac{a^2}{2}-a\right)\,dy &= \left[ay^2-\frac{a^2}{2}y-ay\right]_{y=a}^{y=3a}\\ &= \big(9a^3-\frac{3a^3}{2}-3a^2\big)-\big(a^3-\frac{a^3}{2}-a^2\big)\\ &= 7a^3-2a^2=a^2(7a-2).\end{aligned}$$

(3). 区域 D 由 $x=2$, $y=x$, 及 $xy=1$ 围成（均在第一象限）。对于 $1\le x\le 2$, y 从双曲线 $y=1/x$ 到直线 $y=x$。因此

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy=\int_{x=1}^{2}\int_{y=1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx.$$

内层积分为

$$\begin{aligned}\int_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy=x^2\int_{1/x}^{x}y^{-2}\,dy &= x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{y=1/x}^{y=x}\\ &= x^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{1/x}\right)=x^2\left(-\frac{1}{x}+x\right)=x^3-x.\end{aligned}$$

外层积分得

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^3-x)\,dx &= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2}\\ &= \left(\frac{16}{4}-\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

习题 (10.1.3). 利用函数的奇偶性计算下列积分.

(1) $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ 围成;

(2) $\iint_D \sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由 $x^2-y^2=1$, $x^2+y^2=9$ 围成的含原点的部分.

解答: (1) 积分区域 $D=[-1,1]\times[-1,1]$ 关于 x 轴和 y 轴均对称，被积函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 是偶函数（即 $f(-x,y)=f(x,y)$，$f(x,-y)=f(x,y)$）。利用对称性，可将积分化为第一象限区域 $D_1=[0,1]\times[0,1]$ 上积分的 4 倍：

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

计算

$$\begin{aligned}\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\left(\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\right)\cdot 1+1\cdot\left(\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y\right)\\ &=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

因此原积分 $=4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$.

(2) 区域 D 由 $x^2-y^2=1$ 和 $x^2+y^2=9$ 围成且包含原点，即

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 9,\ x^2-y^2\leqslant 1\}.$$

该区域关于 y 轴对称（因为条件中只出现 x^2，若 $(x,y)\in D$ 则 $(-x,y)\in D$），也关于 x 轴对称。被积函数 $g(x,y)=\sin x\sin y$ 关于 x 是奇函数：

$$g(-x,y)=\sin(-x)\sin y=-\sin x\sin y=-g(x,y).$$

对固定的 y，内层积分 $\displaystyle\int_{x:(x,y)\in D}\sin x\,\mathrm{d}x$ 的积分区间关于原点对称，奇函数在对称区间上的积分为零，因此

$$\iint_D \sin x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_y \sin y\left(\int_{x:(x,y)\in D}\sin x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=0.$$

同理也可利用关于 x 轴的对称性和 g 对 y 的奇偶性得到相同结果。故积分值为 0。

综上，

$$(1)\quad \frac{8}{3};\qquad (2)\quad 0.$$

习题 (10.2.1). 计算下列积分.

(1) $\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^\pi\int_0^\pi\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(5) $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}\mathrm{d}x\int_0^{Rx}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}y$.

解答:

(1). 转换为极坐标：$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le R$. Jacobi 行列式为 r, 且 $x^2 + y^2 = r^2$. 因此

$$\int_0^R \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^R r\ln(1+r^2)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^R r\ln(1+r^2)\mathrm{d}r.$$

计算单积分：

$$\begin{aligned}\int_0^R r\ln(1+r^2)\mathrm{d}r &= \frac{1}{2}\int_0^R \ln(1+r^2)\mathrm{d}(1+r^2)\\ &= \frac{1}{2}\Big[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\Big].\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\Big] = \frac{\pi}{4}\Big[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\Big].$$

(3). 计算内积分：

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(x+y)\mathrm{d}x &= \big[\sin(x+y)\big]_{x=0}^{\pi}\\ &= \sin(\pi+y) - \sin y = -\sin y - \sin y = -2\sin y.\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^\pi \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\pi (-2\sin y)\mathrm{d}y\\ &= -2\big[-\cos y\big]_0^\pi = -2(1+1) = -4.\end{aligned}$$

(5). 令 $a = \frac{R}{\sqrt{1+R^2}}$. 两部分是

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{Rx}\Big(1+\frac{y^2}{x^2}\Big)\mathrm{d}y,\\ I_2 &= \int_a^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\Big(1+\frac{y^2}{x^2}\Big)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对于固定的 x, $\int_0^Y\big(1+\frac{y^2}{x^2}\big)\mathrm{d}y = Y + \frac{Y^3}{3x^2}$. 于是

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^a\Big(Rx + \frac{R^3x^3}{3x^2}\Big)\mathrm{d}x = \int_0^a\Big(R+\frac{R^3}{3}\Big)x\,dx = \frac{R^3(3+R^2)}{6(1+R^2)},\\ I_2 &= \int_a^R\Big[\sqrt{R^2-x^2} + \frac{(R^2-x^2)^{3/2}}{3x^2}\Big]\mathrm{d}x\\ &= \frac{R^5}{3(1+R^2)}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}I = I_1 + I_2 &= \frac{R^3(3+R^2)}{6(1+R^2)} + \frac{R^5}{3(1+R^2)}\\ &= \frac{R^3(3+R^2)+2R^5}{6(1+R^2)} = \frac{3R^3+3R^5}{6(1+R^2)} = \frac{3R^3(1+R^2)}{6(1+R^2)} = \frac{R^3}{2}.\end{aligned}$$

习题 (10.2.2). 计算下列二重积分.

(1) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: x^2+y^2 \leqslant x+y$;

(3) $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:$ 由 $xy=1, xy=2, y=x, y=2x$ 围成的第一象限部分;

(5) $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:$ 由 $xy=a, xy=b, y^2=cx, y^2=dx$ 围成的第一象限部分 $(0<a<b, 0<c<d)$;

(7) $\iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: |x|+|y| \leqslant 1$;

(9) $\iint_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: x^2+y^2 \leqslant a^2$.

解答: 计算以下二重积分。

(1). 区域 $D: x^2+y^2 \le x+y$ 即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}$。采用极坐标 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，不等式化为 $r \le \cos\theta+\sin\theta$，且 θ 满足 $\cos\theta+\sin\theta \ge 0$，即 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$。被积函数 $\sqrt{x^2+y^2}=r$，面积元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta+\sin\theta)^3 \mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

令 $\phi = \theta - \frac{\pi}{4}$，则 $\cos\theta+\sin\theta = \sqrt{2}\cos\phi$，积分区间变为 $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta+\sin\theta)^3\mathrm{d}\theta &= 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= 4\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

故原积分 $= \frac{1}{3}\cdot\frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{9}$。

(2). 区域由 $xy=1,\ xy=2,\ y=x,\ y=2x$ 在第一象限围成。令 $u=xy,\ v=\frac{y}{x}$，则 $u\in[1,2],\ v\in[1,2]$。解出 $x=\sqrt{\frac{u}{v}},\ y=\sqrt{uv}$，雅可比行列式 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2v}$。被积函数 $x^2+y^2 = \frac{u}{v}+uv = u\left(v+\frac{1}{v}\right)$，于是

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2\int_1^2 u\left(v+\frac{1}{v}\right)\cdot\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 u\,\mathrm{d}u\int_1^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

计算得 $\int_1^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}$，$\int_1^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v = \frac{3}{2}$，故原积分 $= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{8}$。

(3). 区域由 $xy=a,\ xy=b,\ y^2=cx,\ y^2=dx$ 在第一象限围成（$0<a<b,\ 0<c<d$）。令 $u=xy,\ v=\frac{y^2}{x}$，则 $u\in[a,b],\ v\in[c,d]$。解出 $x=u^{2/3}v^{-1/3},\ y=u^{1/3}v^{1/3}$，雅可比行列

式 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{3v}$。被积函数 $xy = u$，于是

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \int_c^d u\cdot\frac{1}{3v}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}\int_a^b u\,\mathrm{d}u\int_c^d \frac{\mathrm{d}v}{v}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}\cdot\ln\frac{d}{c}\\ &= \frac{b^2-a^2}{6}\ln\frac{d}{c}.\end{aligned}$$

(4). 区域 $D: |x|+|y|\le 1$，令 $u=x+y,\ v=x-y$，则 $x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}$。条件化为 $\max(|u|,|v|)\le 1$，即 $u,v\in[-1,1]$。雅可比行列式 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$。被积函数 $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}} = \frac{uv}{\sqrt{u+3}}$，于是

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \frac{uv}{\sqrt{u+3}}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{u}{\sqrt{u+3}}\mathrm{d}u\int_{-1}^1 v\,\mathrm{d}v = 0,\end{aligned}$$

因为 $\int_{-1}^1 v\,\mathrm{d}v = 0$。

(5). 区域 $D: x^2+y^2\le a^2$，被积函数 $|xy|$ 关于 x,y 均为偶函数，故只考虑第一象限再乘以 4。在第一象限 $x,y\ge 0$，$|xy| = xy$。采用极坐标 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，则 $xy = r^2\cos\theta\sin\theta$，面积元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，$r\in[0,a],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$。于是

$$\begin{aligned}\iint_{D\cap\text{第一象限}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

计算得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}$，$\int_0^a r^3\mathrm{d}r = \frac{a^4}{4}$，故第一象限积分 $=\frac{a^4}{8}$。由对称性，原积分 $= 4\times\frac{a^4}{8} = \frac{a^4}{2}$。

习题 (10.2.3). 求下列曲线所围成的平面区域的面积. (1) $x^2+2y^2=3$ 和 $xy=1$（不含原点部分）；(2) $(x-y)^2+x^2=a^2\ (a>0)$；(3) $x+y=a, x+y=b, y=kx$ 和 $y=mx$ $(0<a<b, 0<k<m)$.

解答:

(1). 两条曲线的交点为 $(1,1),(-1,-1),(\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(-\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$。在第一象限，$x\in[1,\sqrt{2}]$ 时椭圆 $y=\sqrt{(3-x^2)/2}$ 位于双曲线 $y=1/x$ 之上。第一象限区域的面积为

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{3-x^2}{2}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x}{2\sqrt{2}}\sqrt{3-x^2}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}-\ln x\right]_1^{\sqrt{2}}\\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}}\big(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\big)-\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

令 $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\beta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$。则 $\sin\alpha = \sqrt{2/3}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\sin\beta = 1/\sqrt{3}$, $\cos\beta = \sqrt{2/3}$，

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

故 $\alpha - \beta = \arcsin(1/3)$。于是第一象限区域的面积为 $\frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 2$。由对称性，第三象限区域面积相同，所以总面积为

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{1}{3} - \ln 2.$$

(2). 曲线 $(x-y)^2 + x^2 = a^2$。令 $u = x$, $v = x - y$，则方程化为 $u^2 + v^2 = a^2$，即半径为 a 的圆。线性变换的雅可比行列式 $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = |-1| = 1$，故曲线围成区域的面积等于圆盘 $u^2 + v^2 \leqslant a^2$ 的面积 πa^2。或者，解出 $y = x \pm \sqrt{a^2 - x^2}$，上下曲线的距离为 $2\sqrt{a^2 - x^2}$，则

$$\int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \pi a^2.$$

(3). 区域由直线 $x + y = a$, $x + y = b$ $(0 < a < b)$ 和 $y = kx$, $y = mx$ $(0 < k < m)$ 所围成。作变换 $u = x + y$, $v = y/x$，则 $x = \frac{u}{1+v}$, $y = \frac{uv}{1+v}$。雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{u}{(1+v)^2} > 0.$$

uv 平面上的对应区域为矩形 $a \leqslant u \leqslant b$, $k \leqslant v \leqslant m$。因此

$$\begin{aligned}
\text{面积} &= \int_k^m \int_a^b \frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_k^m \frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2} \cdot \int_a^b u\mathrm{d}u \\
&= \left[-\frac{1}{1+v}\right]_k^m \cdot \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\
&= \frac{m-k}{(1+k)(1+m)} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}.
\end{aligned}$$