

习题 (9.5.18). 求平面上一点 (x_0, y_0) , 使其到 n 个定点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 的距离的平方和最小.

解答: 设目标函数为

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2).$$

首先求偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n 2(x - x_i) = 2\left(nx - \sum_{i=1}^n x_i\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n 2(y - y_i) = 2\left(ny - \sum_{i=1}^n y_i\right). \end{aligned}$$

令偏导数为零得到临界点:

$$\begin{aligned} 2\left(nx - \sum_{i=1}^n x_i\right) = 0 &\implies x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \\ 2\left(ny - \sum_{i=1}^n y_i\right) = 0 &\implies y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned}$$

为验证该临界点为极小值点, 计算 Hessian 矩阵

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}.$$

由于 $2n > 0$ 且 $\det(H) = 4n^2 > 0$, Hessian 矩阵正定, 故 f 为严格凸函数, 上述临界点为全局最小值点. 因此, 使平方距离和最小的点为给定点的质心:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right).$$

习题 (9.5.20). 在旋转椭球面 $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ 上求距平面 $x + y + 2z = 9$ 最远和最近的点.

解答: 设椭球面 $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ 上的点为 (x, y, z) , 到平面 $x + y + 2z = 9$ 的距离为

$$d = \frac{|x + y + 2z - 9|}{\sqrt{6}}.$$

因为 $\sqrt{6}$ 为正常数, 故最值点与 $|x + y + 2z - 9|$ 的最值点相同. 令 $f(x, y, z) = x + y + 2z$, 则 $|f - 9|$ 的最值可通过研究 f 在椭球面上的最值得到.

用 Lagrange 乘数法求 f 在约束 $g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0$ 下的极值. 令 $\nabla f = \lambda \nabla g$, 即

$$(1, 1, 2) = \lambda \left(\frac{x}{2}, 2y, 2z\right).$$

得到方程组

$$\begin{cases} 1 = \lambda \frac{x}{2}, \\ 1 = \lambda 2y, \\ 2 = \lambda 2z. \end{cases}$$

由第一式得 $\lambda = \frac{2}{x}$ ($x \neq 0$), 由第二式得 $\lambda = \frac{1}{2y}$, 由第三式得 $\lambda = \frac{1}{z}$. 联立得

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{2y} \implies x = 4y, \quad \frac{2}{x} = \frac{1}{z} \implies z = \frac{x}{2} = 2y.$$

代入约束方程

$$\frac{(4y)^2}{4} + y^2 + (2y)^2 = 4y^2 + y^2 + 4y^2 = 9y^2 = 1,$$

解得 $y^2 = \frac{1}{9}$, 即 $y = \pm \frac{1}{3}$. 于是得到两个临界点:

$$P_1\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad P_2\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

计算 f 值:

$$f(P_1) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 3, \quad f(P_2) = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -3.$$

因此 f 在椭球面上的最大值为 3 (在 P_1 取得), 最小值为 -3 (在 P_2 取得).

由于 f 的值域为 $[-3, 3]$, 而 $9 > 3$, 故在整个椭球面上恒有 $f - 9 < 0$, 从而 $|f - 9| = 9 - f$. 于是 $|f - 9|$ 的最大值对应 f 的最小值, 最小值对应 f 的最大值. 所以最远点即为 f 取最小值的点 P_2 , 最近点为 f 取最大值的点 P_1 .

距离分别为

$$d_{\max} = \frac{|-3 - 9|}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}, \quad d_{\min} = \frac{|3 - 9|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

习题 (9.5.21). 设曲面 $S: \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$). (1) 证明: S 上任意点处的切平面与各坐标轴的截距之和等于 a ; (2) 在 S 上求一切平面, 使此切平面与三坐标面所围成的四面体体积最大, 并求四面体体积的最大值.

解答:

1. 令 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$. 对于曲面 S 上一点 (x_0, y_0, z_0) , 有 $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$. 梯度为

$$\nabla F = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}} \right),$$

在 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(X - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(Y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(Z - z_0) = 0.$$

两边乘以 2 得

$$\frac{X - x_0}{\sqrt{x_0}} + \frac{Y - y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{Z - z_0}{\sqrt{z_0}} = 0,$$

整理为

$$\frac{X}{\sqrt{x_0}} + \frac{Y}{\sqrt{y_0}} + \frac{Z}{\sqrt{z_0}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0}} + \frac{y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{z_0}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}.$$

求截距: 令 $Y = Z = 0$ 得 x 截距 $A = \sqrt{a}\sqrt{x_0}$; 同理 y 截距 $B = \sqrt{a}\sqrt{y_0}$, z 截距 $C = \sqrt{a}\sqrt{z_0}$. 其和为

$$A + B + C = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a.$$

故切平面在各坐标轴上的截距之和恒为 a .

2. 由 (1) 知, 切平面与三坐标面所围四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6}ABC = \frac{1}{6}(\sqrt{a}\sqrt{x_0})(\sqrt{a}\sqrt{y_0})(\sqrt{a}\sqrt{z_0}) = \frac{1}{6}a^{3/2}\sqrt{x_0y_0z_0}.$$

令 $u = \sqrt{x_0}$, $v = \sqrt{y_0}$, $w = \sqrt{z_0}$, 则约束条件为

$$u + v + w = \sqrt{a}, \quad u, v, w > 0,$$

而体积可表为

$$V = \frac{1}{6}a^{3/2}uvw.$$

最大化 V 等价于在 $u + v + w = \sqrt{a}$ 下最大化 uvw . 由 AM-GM 不等式,

$$uvw \leq \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{a}}{3}\right)^3 = \frac{a^{3/2}}{27},$$

等号成立当且仅当 $u = v = w = \frac{\sqrt{a}}{3}$. 此时最大体积为

$$V_{\max} = \frac{1}{6}a^{3/2} \cdot \frac{a^{3/2}}{27} = \frac{a^3}{162}.$$

对应的切点为

$$x_0 = u^2 = \frac{a}{9}, \quad y_0 = \frac{a}{9}, \quad z_0 = \frac{a}{9}.$$

在该点处, $\sqrt{x_0} = \sqrt{y_0} = \sqrt{z_0} = \frac{\sqrt{a}}{3}$, 代入切平面方程得

$$\frac{X}{\sqrt{x_0}} + \frac{Y}{\sqrt{y_0}} + \frac{Z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a} \implies \frac{X}{\sqrt{a/3}} + \frac{Y}{\sqrt{a/3}} + \frac{Z}{\sqrt{a/3}} = \sqrt{a} \implies X + Y + Z = \frac{a}{3}.$$

故所求切平面为 $x + y + z = \frac{a}{3}$ (切点为 $(\frac{a}{9}, \frac{a}{9}, \frac{a}{9})$), 四面体体积的最大值为 $\frac{a^3}{162}$.

习题 (9.6.1). 求电场强度 $E = \frac{q}{r^3}r$ ($r = |r|$) 的散度和旋度.

解答: 设 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r} = q \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right).$$

令 $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, 于是 $\mathbf{E} = q\mathbf{F}$. 由于 q 为常数, 有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = q \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = q \nabla \times \mathbf{F}.$$

直接计算 (或由所给 WolframAlpha 结果) 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 0).$$

因此,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= q \cdot 0 = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= q \cdot (0, 0, 0) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

以上结果在 $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ 处成立。

习题 (9.6.4). 设 \mathbf{w} 是常向量, $r = xi + yj + zk$, $r = |\mathbf{r}|$, 求:

- (1) $\operatorname{div}[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}]$;
- (2) $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$;
- (3) $\operatorname{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{r})$;
- (4) $\operatorname{div}(r^2 \mathbf{w})$.

解答: 设常向量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, 其中 w_1, w_2, w_3 为常数, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. 向量场 $\mathbf{F} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}$ 的分量为

$$F_x = (w_1x + w_2y + w_3z)w_1, \quad F_y = (w_1x + w_2y + w_3z)w_2, \quad F_z = (w_1x + w_2y + w_3z)w_3.$$

于是

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}] &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = |\mathbf{w}|^2. \end{aligned}$$

2. $\frac{\mathbf{r}}{r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$, 则

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right).$$

计算各偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) &= \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2 + z^2}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) &= \frac{x^2 + z^2}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) &= \frac{x^2 + y^2}{r^3}. \end{aligned}$$

求和得

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2}{r^3} = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} = \frac{2r^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

3. 向量场 $\mathbf{w} \times \mathbf{r}$ 的分量为

$$(w_2z - w_3y, w_3x - w_1z, w_1y - w_2x).$$

于是

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(w_2z - w_3y) + \frac{\partial}{\partial y}(w_3x - w_1z) + \frac{\partial}{\partial z}(w_1y - w_2x) \\ &= 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

4. 向量场 $r^2\mathbf{w}$ 的分量为 (r^2w_1, r^2w_2, r^2w_3) , 其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. 故

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(r^2\mathbf{w}) &= \frac{\partial}{\partial x}(r^2w_1) + \frac{\partial}{\partial y}(r^2w_2) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2w_3) \\ &= w_1 \cdot 2x + w_2 \cdot 2y + w_3 \cdot 2z \\ &= 2(w_1x + w_2y + w_3z) = 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}. \end{aligned}$$

习题 (9.6.7). 设 \mathbf{w} 是常向量, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, $f(r)$ 是 \mathbf{r} 的可微函数, 试通过 ∇ 运算求: (1) $\nabla(\mathbf{w} \cdot f(r)\mathbf{r})$; (2) $\nabla \cdot (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r})$; (3) $\nabla \times (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r})$.

解答: 设 \mathbf{w} 为常向量, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, $f(r)$ 是 r 的可微函数。

1. 计算 $\nabla(\mathbf{w} \cdot f(r)\mathbf{r})$. 令 $\varphi = \mathbf{w} \cdot f(r)\mathbf{r} = f(r)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})$, 由乘积法则:

$$\nabla[f(r)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})] = f(r)\nabla(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})\nabla f(r).$$

由于 \mathbf{w} 为常向量, $\nabla(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{w}$. 又 $\nabla f(r) = f'(r)\nabla r = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$, 代入得:

$$\nabla(\mathbf{w} \cdot f(r)\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{w} + f'(r)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

2. 计算 $\nabla \cdot (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r})$. 利用叉乘积散度的恒等式: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$, 取 $\mathbf{A} = \mathbf{w}$ (常向量), $\mathbf{B} = f(r)\mathbf{r}$, 则:

$$\nabla \cdot (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) - \mathbf{w} \cdot (\nabla \times (f(r)\mathbf{r})).$$

因 \mathbf{w} 为常向量, $\nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$. 再计算 $\nabla \times (f(r)\mathbf{r})$, 由乘积法则:

$$\nabla \times (f(r)\mathbf{r}) = \nabla f(r) \times \mathbf{r} + f(r)(\nabla \times \mathbf{r}).$$

其中 $\nabla f(r) \times \mathbf{r} = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ (向量与自身平行), 且 $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$, 故 $\nabla \times (f(r)\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. 代入得:

$$\nabla \cdot (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r}) = 0.$$

3. 计算 $\nabla \times (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r})$. 利用叉乘积旋度的恒等式:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B},$$

取 $\mathbf{A} = \mathbf{w}$ (常向量), $\mathbf{B} = f(r)\mathbf{r}$. 由于 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 且 $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \mathbf{0}$, 恒等式简化为:

$$\nabla \times (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r}) = \mathbf{w}(\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r})) - (\mathbf{w} \cdot \nabla)(f(r)\mathbf{r}).$$

分别计算两项。首先,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) &= \nabla f(r) \cdot \mathbf{r} + f(r)(\nabla \cdot \mathbf{r}) \\ &= \left(f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \mathbf{r} + 3f(r) \\ &= f'(r)r + 3f(r) = 3f(r) + rf'(r).\end{aligned}$$

其次,

$$\begin{aligned}(\mathbf{w} \cdot \nabla)(f(r)\mathbf{r}) &= [(\mathbf{w} \cdot \nabla)f(r)]\mathbf{r} + f(r)[(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{r}] \\ &= [\mathbf{w} \cdot \nabla f(r)]\mathbf{r} + f(r)\mathbf{w} \\ &= \left[\mathbf{w} \cdot \left(f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] \mathbf{r} + f(r)\mathbf{w} \\ &= f'(r) \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}}{r} \mathbf{r} + f(r)\mathbf{w}.\end{aligned}$$

代入并整理:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r}) &= \mathbf{w}(3f(r) + rf'(r)) - \left(f'(r) \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}}{r} \mathbf{r} + f(r)\mathbf{w} \right) \\ &= (2f(r) + rf'(r))\mathbf{w} - f'(r) \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}}{r} \mathbf{r}.\end{aligned}$$

习题 (10.1.2). $\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$, $D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(2) $\iint_D \sin(x+y) dx dy$, $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$;

解答:

1. 计算

$$I_1 = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy.$$

先对 x 积分, 固定 $y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx &= \int_0^{1/\sqrt{1+y^2}} \frac{\sqrt{1+y^2}}{(1+y^2)^{3/2}(1+u^2)^{3/2}} du \quad (u = x/\sqrt{1+y^2}) \\ &= \frac{1}{1+y^2} \int_0^{1/\sqrt{1+y^2}} \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

利用公式 $\int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + C$, 得

$$\int_0^{1/\sqrt{1+y^2}} \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \Big|_0^{1/\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2+y^2}}.$$

因此

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}.$$

于是

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} dy.$$

令 $t = \sqrt{2+y^2}$, 则 $t^2 = 2+y^2$, $y dy = t dt$, 且当 $y = 0$ 时 $t = \sqrt{2}$, $y = 1$ 时 $t = \sqrt{3}$, $1+y^2 = t^2 - 1$. 代入得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t dt}{(t^2-1)t} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

计算端点值:

$$\begin{aligned} \left. \frac{t-1}{t+1} \right|_{t=\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}, \\ \left. \frac{t-1}{t+1} \right|_{t=\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

故

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\ln(2 - \sqrt{3}) - \ln(3 - 2\sqrt{2}) \right] = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{3 - 2\sqrt{2}} \right).$$

2. 计算

$$I_2 = \iint_{[0,\pi] \times [0,\pi]} \sin(x+y) dx dy.$$

固定 $y \in [0, \pi]$, 先对 x 积分:

$$\int_0^\pi \sin(x+y) dx = [-\cos(x+y)]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos(\pi+y) + \cos y.$$

由于 $\cos(\pi+y) = -\cos y$, 所以 $-\cos(\pi+y) = \cos y$, 于是

$$\int_0^\pi \sin(x+y) dx = \cos y + \cos y = 2 \cos y.$$

因此

$$I_2 = \int_0^\pi 2 \cos y dy = 2 [\sin y]_0^\pi = 2(\sin \pi - \sin 0) = 0.$$

习题 (10.1.4). 设函数 φ 和 ψ 分别在区间 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 上可积, 求证: $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积, 且有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx \int_c^d \psi(y) dy.$$

解答: 由于 φ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 故 φ 有界且其不连续点集 $D_\varphi \subseteq [a, b]$ 的 Lebesgue 测度为零。同理, ψ 在 $[c, d]$ 上有界且其不连续点集 $D_\psi \subseteq [c, d]$ 的测度为零。

f 的可积性: 存在 $M_\varphi, M_\psi > 0$ 使得对任意 $x \in [a, b]$ 有 $|\varphi(x)| \leq M_\varphi$, 对任意 $y \in [c, d]$ 有 $|\psi(y)| \leq M_\psi$ 。于是对任意 $(x, y) \in D$,

$$|f(x, y)| = |\varphi(x)\psi(y)| \leq M_\varphi M_\psi,$$

故 f 在 D 上有界。

f 在点 (x_0, y_0) 连续当且仅当 φ 在 x_0 连续且 ψ 在 y_0 连续。因此 f 的不连续点集 D_f 满足

$$D_f \subseteq (D_\varphi \times [c, d]) \cup ([a, b] \times D_\psi).$$

因为 D_φ 在 \mathbb{R} 中测度为零, 故 $D_\varphi \times [c, d]$ 在 \mathbb{R}^2 中的平面测度为零; 同理 $[a, b] \times D_\psi$ 的平面测度为零。两个零测集的并仍为零测集, 从而 D_f 是零测集。

由 Lebesgue 判别法 (有界函数在矩形区域上 Riemann 可积当且仅当其不连续点集为零测集) 知, f 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上 Riemann 可积。

二重积分的值: 由于 f 在 D 上可积, 由 Fubini 定理得

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

对固定的 $x \in [a, b]$, 函数 $y \mapsto f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ 在 $[c, d]$ 上可积 (为 ψ 的常数倍), 故

$$\int_c^d f(x, y) \, dy = \varphi(x) \int_c^d \psi(y) \, dy.$$

记 $A = \int_c^d \psi(y) \, dy$ (因 ψ 可积, 该积分存在), 则

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \int_a^b \varphi(x) A \, dx \\ &= A \int_a^b \varphi(x) \, dx \\ &= \left(\int_a^b \varphi(x) \, dx \right) \left(\int_c^d \psi(y) \, dy \right). \end{aligned}$$

等式得证。

习题 (10.1.6). 设函数 $f(x, y)$ 有连续的二阶偏导数, 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上, 求积分 $\iint_D \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \, dx dy$.

解答: 设 $f(x, y)$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上有连续的二阶偏导数, 计算

$$I = \iint_D \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \, dx dy.$$

由 Fubini 定理, 可将重积分化为累次积分:

$$I = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \, dx dy.$$

对固定的 y , 内层积分

$$\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dx = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=b} - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=a} = \frac{\partial f}{\partial y}(b, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, y).$$

于是

$$I = \int_c^d \left[\frac{\partial f}{\partial y}(b, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, y) \right] dy.$$

再对 y 积分, 由牛顿-莱布尼茨公式得

$$\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(b, y) dy = f(b, d) - f(b, c), \quad \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(a, y) dy = f(a, d) - f(a, c).$$

因此

$$I = (f(b, d) - f(b, c)) - (f(a, d) - f(a, c)) = f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c).$$