**习题 (9.4.8).** 求下列曲面在给定点的切平面和法线方程.

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, 在点 $(3,4,-7)$;
(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$, 在点 $\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$;
(3) $e^z-z+xy=3$, 在点 $(2,1,0)$;
(4) $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z$, 在点 $(2,3,6)$.

**解答:**

1. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ 在点 $(3,4,-7)$ 处。计算偏导数：

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y,\quad 在(3,4):\ f_x=\frac{3}{5}-4=-\frac{17}{5},$$
$$f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-x,\quad 在(3,4):\ f_y=\frac{4}{5}-3=-\frac{11}{5}.$$

切平面方程为
$$z+7=-\frac{17}{5}(x-3)-\frac{11}{5}(y-4),$$
化简得
$$17x+11y+5z=60.$$
法线方向向量为 $(f_x,f_y,-1)=\left(-\frac{17}{5},-\frac{11}{5},-1\right)$，对称式方程为
$$\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}.$$

2. 曲面 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 在点 $\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$ 处。计算偏导数：

$$f_x=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad 在(1,1):\ f_x=-\frac{1}{2},$$
$$f_y=\frac{x}{x^2+y^2},\quad 在(1,1):\ f_y=\frac{1}{2}.$$

切平面方程为
$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1),$$
化简得
$$x-y+2z=\frac{\pi}{2}.$$
法线方向向量为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$，对称式方程为
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2}.$$

3. 曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处。令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-z+xy-3=0$，计算偏导数：

$$F_x=y,\quad 在(2,1,0):\ F_x=1,$$
$$F_y=x,\quad 在(2,1,0):\ F_y=2,$$
$$F_z=\mathrm{e}^z-1,\quad 在(2,1,0):\ F_z=0.$$

切平面方程为

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)+0\cdot(z-0)=0 \quad\Longrightarrow\quad x+2y=4.$$

法线方向向量为 $(1,2,0)$，由于 $F_z=0$，法线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2},\quad z=0.$$

4. 曲面 $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z$ 在点 $(2,3,6)$ 处。令 $F(x,y,z)=4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x-y-z=0$，计算偏导数：

$$\begin{aligned}
F_x&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1,\quad \text{在}(2,3,6):\ \sqrt{4+9+36}=7,\ F_x=\frac{2}{7}-1=-\frac{5}{7},\\
F_y&=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1,\quad \text{在}(2,3,6):\ F_y=\frac{3}{7}-1=-\frac{4}{7},\\
F_z&=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1,\quad \text{在}(2,3,6):\ F_z=\frac{6}{7}-1=-\frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

切平面方程为

$$-\frac{5}{7}(x-2)-\frac{4}{7}(y-3)-\frac{1}{7}(z-6)=0,$$

化简得

$$5x+4y+z=28.$$

法线方向向量为 $\left(-\frac{5}{7},-\frac{4}{7},-\frac{1}{7}\right)$，对称式方程为

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-6}{1}.$$

**习题 (9.4.10).** 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z=0$，并写出这个法线方程.

**解答:** 曲面 $S$ 由 $z=xy$ 给出，等价地写为 $F(x,y,z)=xy-z=0$。梯度 $\nabla F=(y,\,x,\,-1)$ 是曲面在任意点处的法向量。平面 $\pi: x+3y+z=0$ 的法向量为 $\mathbf{n}=(1,3,1)$。设所求点为 $P(x_0,y_0,z_0)\in S$，则 $S$ 在 $P$ 处的法线方向向量为 $\nabla F|_P=(y_0,x_0,-1)$。要使法线垂直于平面 $\pi$，其方向向量必须与 $\mathbf{n}$ 平行，故存在标量 $\lambda$ 使得

$$(y_0,\,x_0,\,-1)=\lambda(1,3,1).$$

由此得方程组

$$\begin{aligned}
y_0&=\lambda,\\
x_0&=3\lambda,\\
-1&=\lambda.
\end{aligned}$$

由 $-1=\lambda$ 得 $\lambda=-1$,进而 $y_0=-1$,$x_0=-3$。由于 $P$ 在曲面上,有 $z_0=x_0y_0=(-3)(-1)=3$。因此所求点为 $P(-3,-1,3)$。

在点 $P$ 处的法线方向可取为 $\mathbf{n}=(1,3,1)$（与 $\nabla F|_P=(-1,-3,-1)$ 平行）。法线的参数方程为

$$x=-3+t,\quad y=-1+3t,\quad z=3+t,\qquad t\in\mathbb{R},$$

对称式方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

**习题 (9.4.12).** 设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 $\pi$ 上，而平面 $\pi$ 与曲面：$z=x^2+y^2$ 相切于点 (1,-2,5)，求 a,b 之值.

**解答:** 首先求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,-2,5)$ 处的切平面。计算偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2y.$$

在点 $(1,-2)$ 处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-4.$$

故切平面方程为

$$z-5=2(x-1)-4(y+2),$$

即

$$2x-4y-z-5=0.$$

直线 $l$ 由两平面

$$x+y+b=0,\qquad x+ay-z-3=0$$

的交线定义。由于 $l$ 在平面 $\pi$ 上，故 $l$ 上任意点均满足 $\pi$ 的方程。由 $x+y+b=0$ 得 $y=-x-b$，代入第二式得

$$z=x+a(-x-b)-3=(1-a)x-ab-3.$$

将 $y$ 与 $z$ 的表达式代入切平面方程：

$$\begin{aligned}2x-4(-x-b)-\big[(1-a)x-ab-3\big]-5&=0\\ 2x+4x+4b-(1-a)x+ab+3-5&=0\\ (6x-(1-a)x)+(4b+ab)-2&=0\\ (5+a)x+(4b+ab)-2&=0.\end{aligned}$$

上式对 $l$ 上任意 $x$ 均成立，故 $x$ 的系数及常数项必须为零：

$$5+a=0\quad\Rightarrow\quad a=-5,$$

$$4b+ab-2=0\quad\Rightarrow\quad 4b+(-5)b-2=-b-2=0\quad\Rightarrow\quad b=-2.$$

**习题 (9.4.16).** 证明：曲面 $x+2y-\ln z+4=0$ 和 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点（2,-3,1）处相切（即有公共的切平面).

**解答:** 首先验证点 $(2,-3,1)$ 在两张曲面上。

对于曲面 $F(x,y,z)=x+2y-\ln z+4$，有

$$F(2,-3,1)=2+2\cdot(-3)-\ln 1+4=2-6-0+4=0.$$

对于曲面 $G(x,y,z)=x^2-xy-8x+z+5$，有

$$G(2,-3,1)=2^2-2\cdot(-3)-8\cdot 2+1+5=4+6-16+1+5=0.$$

因此该点是两曲面的公共点。

计算两函数在点 $(2,-3,1)$ 处的梯度。

对于 $F$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=1,\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=2,\\ \frac{\partial F}{\partial z}&=-\frac{1}{z}.\end{aligned}$$

于是

$$\nabla F(2,-3,1)=\big(1,\ 2,\ -1\big).$$

对于 $G$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x}&=2x-y-8,\\ \frac{\partial G}{\partial y}&=-x,\\ \frac{\partial G}{\partial z}&=1.\end{aligned}$$

于是

$$\nabla G(2,-3,1)=\big(2\cdot 2-(-3)-8,\ -2,\ 1\big)=\big(-1,\ -2,\ 1\big).$$

比较两梯度：

$$\nabla G(2,-3,1)=(-1,\ -2,\ 1)=-(1,\ 2,\ -1)=-\nabla F(2,-3,1).$$

故两梯度平行。

由于在公共点处法向量平行，因此两曲面在该点具有公共的切平面。具体地，切平面方程为

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y+3)-1\cdot(z-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad x+2y-z+5=0.$$

同理，由 $\nabla G$ 所得切平面方程亦为 $x+2y-z+5=0$。

因此，两曲面在点 $(2,-3,1)$ 处相切。

**习题 (9.4.18).** 设方程组 $\begin{cases}pu+qv-t^2=0,\\ qu+pv-s^2=0\end{cases}$ $(p^2-q^2\neq 0)$ 确定了隐函数 $\begin{cases}u=u(s,t),\\ v=v(s,t)\end{cases}$ 以及反函数 $\begin{cases}s=s(u,v),\\ t=t(u,v).\end{cases}$ 求证:

$$\frac{\partial t}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{p^2}{p^2-q^2}.$$

**解答:** 给定方程组

$$\begin{cases} pu + qv - t^2 = 0, \\ qu + pv - s^2 = 0 \end{cases}$$

其中 $p^2 - q^2 \neq 0$，它确定了隐函数 $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$ 以及反函数 $s = s(u,v)$, $t = t(u,v)$。假设 $s \neq 0$ 且 $t \neq 0$ 以保证所有导数存在。

**计算** $\dfrac{\partial u}{\partial t}$**：**将方程组对 $t$ 求导，视 $u, v$ 为 $s, t$ 的函数且 $s$ 固定：

$$p\frac{\partial u}{\partial t} + q\frac{\partial v}{\partial t} - 2t = 0,$$
$$q\frac{\partial u}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

系数行列式 $p^2 - q^2 \neq 0$，解出

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} 2t & q \\ 0 & p \end{vmatrix}}{p^2 - q^2} = \frac{2tp}{p^2 - q^2}.$$

**计算** $\dfrac{\partial t}{\partial u}$**：**将第一个方程对 $u$ 求导，视 $t$ 为 $u, v$ 的函数且 $v$ 固定：

$$p - 2t\frac{\partial t}{\partial u} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{p}{2t}.$$

于是第一项乘积为

$$\frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{p}{2t} \cdot \frac{2tp}{p^2 - q^2} = \frac{p^2}{p^2 - q^2}.$$

**计算** $\dfrac{\partial v}{\partial s}$**：**将方程组对 $s$ 求导，视 $u, v$ 为 $s, t$ 的函数且 $t$ 固定：

$$p\frac{\partial u}{\partial s} + q\frac{\partial v}{\partial s} = 0,$$
$$q\frac{\partial u}{\partial s} + p\frac{\partial v}{\partial s} - 2s = 0.$$

解出

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\begin{vmatrix} p & 0 \\ q & 2s \end{vmatrix}}{p^2 - q^2} = \frac{2ps}{p^2 - q^2}.$$

**计算** $\dfrac{\partial s}{\partial v}$**：**将第二个方程对 $v$ 求导，视 $s$ 为 $u, v$ 的函数且 $u$ 固定：

$$p - 2s\frac{\partial s}{\partial v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{p}{2s}.$$

于是第二项乘积为

$$\frac{\partial s}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{p}{2s} \cdot \frac{2ps}{p^2 - q^2} = \frac{p^2}{p^2 - q^2}.$$

因此，

$$\frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{p^2}{p^2 - q^2}.$$

**习题 (9.5.4).** 求下列函数的 Taylor 公式，并指出展开式成立的区域.

(1) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$，展开到三阶为止；

(3) $f(x,y)=\frac{1}{1-x-y+xy}$ 在点 $(0,0)$，展开到 $n$ 阶为止；

(5) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$，展开到 $n$ 阶为止；

(7) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$ 的 Taylor 公式.

**解答:**

1. 计算各阶偏导数在 $(0,0)$ 的值：

$$
\begin{aligned}
f(0,0)&=0,\\
f_x&=e^x\ln(1+y),\quad f_x(0,0)=0,\\
f_y&=\frac{e^x}{1+y},\quad f_y(0,0)=1,\\
f_{xx}&=e^x\ln(1+y),\quad f_{xx}(0,0)=0,\\
f_{yy}&=-\frac{e^x}{(1+y)^2},\quad f_{yy}(0,0)=-1,\\
f_{xy}&=\frac{e^x}{1+y},\quad f_{xy}(0,0)=1,\\
f_{xxx}&=e^x\ln(1+y),\quad f_{xxx}(0,0)=0,\\
f_{xxy}&=\frac{e^x}{1+y},\quad f_{xxy}(0,0)=1,\\
f_{xyy}&=-\frac{e^x}{(1+y)^2},\quad f_{xyy}(0,0)=-1,\\
f_{yyy}&=\frac{2e^x}{(1+y)^3},\quad f_{yyy}(0,0)=2.
\end{aligned}
$$

代入三阶泰勒公式：

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=f(0,0)+\big(f_xx+f_yy\big)+\frac{1}{2!}\big(f_{xx}x^2+2f_{xy}xy+f_{yy}y^2\big)\\
&\quad+\frac{1}{3!}\big(f_{xxx}x^3+3f_{xxy}x^2y+3f_{xyy}xy^2+f_{yyy}y^3\big)+R_3\\
&=0+(0\cdot x+1\cdot y)+\frac{1}{2}\big(0\cdot x^2+2\cdot 1\cdot xy+(-1)y^2\big)\\
&\quad+\frac{1}{6}\big(0\cdot x^3+3\cdot 1\cdot x^2y+3\cdot(-1)\cdot xy^2+2\cdot y^3\big)+R_3\\
&=y+xy-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3+R_3(x,y).
\end{aligned}
$$

展开式成立的区域：$|y|<1$，$x\in\mathbb{R}$。

2. 注意到 $1-x-y+xy=(1-x)(1-y)$，故

$$
f(x,y)=\frac{1}{(1-x)(1-y)}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-y}.
$$

利用几何级数展开，当 $|x|<1$，$|y|<1$ 时，

$$
\frac{1}{1-x}=\sum_{i=0}^{\infty}x^i,\qquad \frac{1}{1-y}=\sum_{j=0}^{\infty}y^j.
$$

因此

$$f(x,y)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}y^j\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}x^iy^j.$$

到 $n$ 阶的泰勒多项式为所有满足 $i+j\leqslant n$ 的项之和：

$$P_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}x^iy^{k-i}.$$

展开式成立的区域：$|x|<1$ 且 $|y|<1$。

3. 令 $u=x^2+y^2$，则 $f(x,y)=\sin u$。由 $\sin u$ 的麦克劳林级数

$$\sin u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}u^{2k+1},$$

得

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x^2+y^2)^{2k+1}.$$

每一项 $(x^2+y^2)^{2k+1}$ 展开后为 $4k+2$ 次齐次多项式。因此，对于给定的 $n$，只需取所有满足 $4k+2\leqslant n$ 的 $k$ 值，并将对应项展开至总次数不超过 $n$。具体地：

- 若 $n<2$，则泰勒多项式为 0。
- 若 $2\leqslant n<6$，则多项式为 $x^2+y^2$。
- 若 $6\leqslant n<10$，则多项式为 $(x^2+y^2)-\dfrac{1}{6}(x^2+y^2)^3$，依此类推。

展开式成立的区域：对任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 均收敛。

4. 计算在点 $(1,-2)$ 处的函数值与偏导数：

$$\begin{gathered}f(1,-2)=5,\\ f_x=4x-y-6,\quad f_x(1,-2)=0,\\ f_y=-x-2y-3,\quad f_y(1,-2)=0,\\ f_{xx}=4,\quad f_{yy}=-2,\quad f_{xy}=-1.\end{gathered}$$

三阶及更高阶偏导数均为零。故泰勒公式（二阶即精确）为

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(1,-2)+\frac{1}{2!}\Big(f_{xx}(x-1)^2+2f_{xy}(x-1)(y+2)+f_{yy}(y+2)^2\Big)\\&=5+\frac{1}{2}\Big(4(x-1)^2+2(-1)(x-1)(y+2)+(-2)(y+2)^2\Big)\\&=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.\end{aligned}$$

由于 $f$ 是二次多项式，该展开对一切 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 精确成立。

**习题 (9.5.7).** 求下列函数的极值.

(1) $f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}(x>0,y>0)$;

(3) $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+2y+y^2)$;

(5) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$, 求隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

**解答:**

1. 求偏导数：
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}.$$
令偏导数为零：
$$\begin{aligned} y - \frac{50}{x^2} = 0 &\implies y = \frac{50}{x^2}, \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 &\implies x = \frac{20}{y^2}. \end{aligned}$$
将第一式代入第二式：
$$x = \frac{20}{\left(\frac{50}{x^2}\right)^2} = \frac{20}{\frac{2500}{x^4}} = \frac{20x^4}{2500} = \frac{x^4}{125}.$$
于是 $x = \frac{x^4}{125}$，即 $x^4 - 125x = 0$，因 $x > 0$，得 $x^3 = 125$，故 $x = 5$。代入 $y = \frac{50}{x^2}$ 得 $y = 2$。
计算二阶偏导数：
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$
在点 $(5, 2)$ 处：
$$f_{xx} = \frac{100}{125} = 0.8, \qquad f_{yy} = \frac{40}{8} = 5, \qquad f_{xy} = 1.$$
海森行列式 $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0.8 \times 5 - 1^2 = 3 > 0$，且 $f_{xx} > 0$，故 $(5, 2)$ 是极小值点。
极小值为
$$f(5, 2) = 5 \times 2 + \frac{50}{5} + \frac{20}{2} = 10 + 10 + 10 = 30.$$

2. 求偏导数：
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{2x}\big(2x + 2y^2 + 4y + 1\big), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2e^{2x}(y + 1). \end{aligned}$$
令偏导数为零，注意 $e^{2x} > 0$，故
$$\begin{aligned} 2x + 2y^2 + 4y + 1 = 0&, \\ y + 1 = 0 &\implies y = -1. \end{aligned}$$
将 $y = -1$ 代入第一式：
$$2x + 2(-1)^2 + 4(-1) + 1 = 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$
临界点为 $(\frac{1}{2}, -1)$。

计算二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x}\big(x + (y+1)^2\big),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{2x},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4e^{2x}(y+1).$$

在点 $(\frac{1}{2}, -1)$ 处：

$$f_{xx} = 4e^1\big(\tfrac{1}{2} + 0\big) = 2e, \qquad f_{yy} = 2e, \qquad f_{xy} = 4e^1(0) = 0.$$

海森行列式 $D = (2e)(2e) - 0^2 = 4e^2 > 0$，且 $f_{xx} > 0$，故 $(\frac{1}{2}, -1)$ 是极小值点。
极小值为

$$f\big(\tfrac{1}{2}, -1\big) = e^1\big(\tfrac{1}{2} + 2(-1) + (-1)^2\big) = e\big(-\tfrac{1}{2}\big) = -\frac{e}{2}.$$

3. 对方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 隐函数求导，视 $z = z(x, y)$：

$$\frac{\partial}{\partial x} : 2x + 2z\, z_x - 2 - 4z_x = 0 \implies z_x = \frac{1 - x}{z - 2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} : 2y + 2z\, z_y + 2 - 4z_y = 0 \implies z_y = -\frac{y + 1}{z - 2}.$$

令 $z_x = 0,\ z_y = 0$ 得 $x = 1,\ y = -1$。代入原方程：

$$1^2 + (-1)^2 + z^2 - 2 \cdot 1 + 2(-1) - 4z - 10 = 0 \implies z^2 - 4z - 12 = 0.$$

解得 $z = 6$ 或 $z = -2$。
计算二阶偏导数（在临界点处 $z_x = z_y = 0$）：

$$z_{xx} = -\frac{1}{z - 2},$$
$$z_{yy} = -\frac{1}{z - 2},$$
$$z_{xy} = 0.$$

在点 $(1, -1, 6)$ 处：$z - 2 = 4$，故 $z_{xx} = z_{yy} = -\frac{1}{4} < 0$，海森行列式 $D = \big(-\frac{1}{4}\big)^2 - 0^2 = \frac{1}{16} > 0$，且 $z_{xx} < 0$，因此 $z = 6$ 是极大值。
在点 $(1, -1, -2)$ 处：$z - 2 = -4$，故 $z_{xx} = z_{yy} = \frac{1}{4} > 0$，海森行列式 $D = \big(\frac{1}{4}\big)^2 = \frac{1}{16} > 0$，且 $z_{xx} > 0$，因此 $z = -2$ 是极小值。
所以隐函数 $z = z(x, y)$ 的极大值为 6，极小值为 $-2$，均在 $(x, y) = (1, -1)$ 处取得。

**习题 (9.5.8).** 求一个三角形，使得它的三个角的正弦乘积最大.

**解答:** 设三角形的三个角为 $A, B, C > 0$，满足 $A + B + C = \pi$。需求 $f(A, B, C) = \sin A \sin B \sin C$ 的最大值。

使用 Lagrange 乘数法：令 $g(A,B,C)=A+B+C-\pi=0$，则 $\nabla f=\lambda\nabla g$ 给出

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial A}&=\cos A\,\sin B\,\sin C=\lambda,\\ \frac{\partial f}{\partial B}&=\sin A\,\cos B\,\sin C=\lambda,\\ \frac{\partial f}{\partial C}&=\sin A\,\sin B\,\cos C=\lambda.\end{aligned}$$

假设 $\sin A,\sin B,\sin C\neq 0$（否则乘积为零，显然非最大）。由前两式得

$$\cos A\,\sin B\,\sin C=\sin A\,\cos B\,\sin C\Longrightarrow\cos A\sin B=\sin A\cos B\Longrightarrow\sin(B-A)=0.$$

因 $A,B\in(0,\pi)$，故 $B-A=k\pi$ 仅当 $k=0$ 时成立，于是 $A=B$。类似地，由第一与第三式得 $A=C$。所以 $A=B=C$。代入约束 $A+B+C=\pi$ 得 $A=B=C=\pi/3$。

函数 $f$ 在紧集 $\{(A,B,C):A,B,C\geqslant 0,\ A+B+C=\pi\}$ 上连续。边界上（至少一角为零）$f=0$，而 $f(\pi/3,\pi/3,\pi/3)=(\sin(\pi/3))^3=(\sqrt{3}/2)^3=3\sqrt{3}/8>0$。由于 $(\pi/3,\pi/3,\pi/3)$ 是唯一的内部临界点，它必为全局最大值点。

因此，使三个角的正弦乘积最大的三角形是等边三角形，其角均为 $\pi/3$，最大乘积为 $3\sqrt{3}/8$。

**习题 (9.5.10).** 求下列函数在指定条件下的极值.

(1) $u=x^2+y^2$, 若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

(3) $u=\sin x\sin y\sin z$, 若 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, $x>0,y>0,z>0$;

**解答:**

1. 求函数 $u=x^2+y^2$ 在条件 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 下的极值。构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\Big(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\Big).$$

令偏导为零：

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=2x+\frac{\lambda}{a}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=2y+\frac{\lambda}{b}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0.\end{aligned}$$

由前两式得 $x=-\frac{\lambda}{2a}$, $y=-\frac{\lambda}{2b}$。代入约束条件：

$$\begin{aligned}\frac{-\lambda/(2a)}{a}+\frac{-\lambda/(2b)}{b}=1&\implies -\lambda\Big(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\Big)=1\\ &\implies \lambda=-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

于是

$$x=-\frac{\lambda}{2a}=\frac{ab^2}{a^2+b^2},\qquad y=-\frac{\lambda}{2b}=\frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

因为 $u = x^2 + y^2$ 表示点到原点的距离平方，而约束是一条不经过原点的直线，故该临界点给出唯一的极小值。计算极小值：

$$\begin{aligned} u_{\min} = x^2 + y^2 &= \frac{a^2b^4}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^4b^2}{(a^2+b^2)^2} \\ &= \frac{a^2b^2(b^2+a^2)}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

由于直线无界，函数无最大值。

2. 求函数 $u = \sin x \, \sin y \, \sin z$ 在条件 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ 且 $x > 0, y > 0, z > 0$ 下的极值。构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = \sin x \, \sin y \, \sin z + \lambda\Big(x + y + z - \frac{\pi}{2}\Big).$$

令偏导为零：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \cos x \, \sin y \, \sin z + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \sin x \, \cos y \, \sin z + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= \sin x \, \sin y \, \cos z + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + y + z - \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

于是

$$\cos x \, \sin y \, \sin z = \sin x \, \cos y \, \sin z = \sin x \, \sin y \, \cos z = -\lambda.$$

因为 $y, z \in (0, \pi/2)$，故 $\sin y > 0, \sin z > 0$。将第一式与第二式相除（消去 $\sin z$）得

$$\frac{\cos x \, \sin y}{\sin x \, \cos y} = 1 \implies \tan x = \tan y \implies x = y.$$

类似地，由第一式与第三式消去 $\sin y$ 得 $x = z$。因此 $x = y = z$。代入约束条件 $3x = \pi/2$，得

$$x = y = z = \frac{\pi}{6}.$$

在该点处函数值为

$$u = \sin^3 \frac{\pi}{6} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^3 = \frac{1}{8}.$$

当 $x, y, z$ 趋于边界（例如任一变量趋于 $0^+$）时，$u \to 0$，而 $u > 0$ 且可无限接近 0，故该临界点给出最大值。函数无最小值（下确界为 0 但不可达）。

**习题 (9.5.11).** 求下列函数在指定范围内的最大值与最小值.

(2) $z = x^2 - xy + y^2$, $\{(x, y) | |x| + |y| \leqslant 1\}$;

(4) $z = x^2y(4 - x - y)$, $\{(x, y) | x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 6\}$.

**解答:**

2. 函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$ 上连续，$D$ 是有界闭区域，故最大值与最小值存在。
   (a) 求内点驻点：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y.$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$，解得 $x=0,\ y=0$。该点在 $D$ 内部（$|0|+|0|=0<1$），且 $z(0,0)=0$。

   (b) 边界分析：边界为 $|x|+|y|=1$，分为四段。
   - 第一象限段：$x+y=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$。令 $x=t,\ y=1-t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，则

$$z=t^2-t(1-t)+(1-t)^2=3t^2-3t+1.$$

导数 $z'=6t-3$，令 $z'=0$ 得 $t=0.5$，此时 $z=0.25$；端点 $t=0,1$ 处 $z=1$。
   - 第二象限段：$-x+y=1$ $(x\leqslant 0,\ y\geqslant 0)$。令 $x=t,\ y=1+t$ $(-1\leqslant t\leqslant 0)$，则

$$z=t^2-t(1+t)+(1+t)^2=t^2+t+1.$$

导数 $z'=2t+1$，令 $z'=0$ 得 $t=-0.5$，此时 $z=0.75$；端点 $t=-1,0$ 处 $z=1$。
   - 第三象限段：$-x-y=1$ $(x\leqslant 0,\ y\leqslant 0)$。令 $x=t,\ y=-1-t$ $(-1\leqslant t\leqslant 0)$，则

$$z=t^2-t(-1-t)+(-1-t)^2=3t^2+3t+1.$$

导数 $z'=6t+3$，令 $z'=0$ 得 $t=-0.5$，此时 $z=0.25$；端点 $t=-1,0$ 处 $z=1$。
   - 第四象限段：$x-y=1$ $(x\geqslant 0,\ y\leqslant 0)$。令 $x=t,\ y=t-1$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，则

$$z=t^2-t(t-1)+(t-1)^2=t^2-t+1.$$

导数 $z'=2t-1$，令 $z'=0$ 得 $t=0.5$，此时 $z=0.75$；端点 $t=0,1$ 处 $z=1$。

边界上 $z$ 的取值范围为 $[0.25,1]$，四个顶点 $(\pm1,0),\ (0,\pm1)$ 处 $z=1$。

   (c) 比较：内点 $z=0$，边界上 $z\geqslant 0.25$，且 $z$ 为正定二次型（除原点外恒正），故全局最小值为 0，在 $(0,0)$ 取到；全局最大值为 1，在 $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$ 取到。

**答案**：最大值 1，最小值 0。

4. 函数 $z=x^2y(4-x-y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 6\}$ 上连续，$D$ 是有界闭区域，故最大值与最小值存在。
   (a) 求内点驻点：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy(8-3x-2y),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2(4-x-2y).$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$，并注意 $x>0,\ y>0$，得方程组

$$\begin{cases}8-3x-2y=0,\\4-x-2y=0.\end{cases}$$

解得 $x=2,\ y=1$。该点在 $D$ 内部（$2+1=3<6$），且 $z(2,1)=4$。二阶导数检验：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2y(4-3x-y), && \text{在}(2,1)\ \text{处} = -6,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2x^2, && \text{在}(2,1)\ \text{处} = -8,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= x(8-3x-4y), && \text{在}(2,1)\ \text{处} = -4.
\end{aligned}$$

Hessian 行列式 $(-6)(-8)-(-4)^2=32>0$ 且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0$，故 $(2,1)$ 是局部极大值点。

(b) 边界分析：
- 在 $x=0$ $(0\leqslant y\leqslant 6)$ 上：$z=0$。
- 在 $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上：$z=0$。
- 在 $x+y=6$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ 上：令 $y=6-x$，则

$$z=x^2(6-x)(4-6)=-2x^2(6-x)=-12x^2+2x^3,\quad 0\leqslant x\leqslant 6.$$

求导 $z'=-24x+6x^2=6x(x-4)$，令 $z'=0$ 得 $x=4$（$x=0$ 为端点）。当 $x=4$ 时 $y=2$，$z=-64$；端点 $x=0,6$ 处 $z=0$。故此边上 $z$ 的取值范围为 $[-64,0]$。

(c) 比较：内点最大值为 4；边界上最大值为 0，最小值为 $-64$。因此全局最大值为 4，在 $(2,1)$ 取到；全局最小值为 $-64$，在 $(4,2)$ 取到。

**答案**：最大值 4，最小值 $-64$。

**习题 (9.5.14).** 设 $f(x,y)=3x^2y-x^4-2y^2$ . 证明：(0,0) 不是它的极值点，但沿过 (0,0) 点的每条直线，(0,0) 都是它的极大值点.

**解答:** 首先计算偏导数：

$$f_x=6xy-4x^3,\quad f_y=3x^2-4y.$$

在点 $(0,0)$ 处，$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$，故 $(0,0)$ 是一个临界点。

为证明 $(0,0)$ 不是极值点，考察两条不同的路径：沿直线 $y=0$：$f(x,0)=-x^4$。对任意 $x\neq 0$，有 $f(x,0)<0=f(0,0)$。沿曲线 $y=\frac{3}{4}x^2$：

$$\begin{aligned}
f\left(x,\frac{3}{4}x^2\right) &= 3x^2\cdot\frac{3}{4}x^2-x^4-2\left(\frac{3}{4}x^2\right)^2\\
&= \frac{9}{4}x^4-x^4-\frac{9}{8}x^4\\
&= \frac{1}{8}x^4>0\quad (x\neq 0).
\end{aligned}$$

于是在 $(0,0)$ 的任何邻域内，都存在使 $f<0$ 的点（在 $y=0$ 上）和使 $f>0$ 的点（在 $y=\frac{3}{4}x^2$ 上），故 $(0,0)$ 不是局部极值点。

其次，证明沿每条过 $(0,0)$ 的直线，$(0,0)$ 都是局部极大值点。任取一条过原点的非垂直直线，其方程可写为 $y=kx$。定义

$$g(x)=f(x,kx)=3kx^3-x^4-2k^2x^2=-x^2(x-k)(x-2k).$$

有 $g(0)=0$。因子 $-x^2\le 0$，且仅当 $x=0$ 时取等。二次式 $(x-k)(x-2k)$ 的根为 $x=k$ 与 $x=2k$。在 $x=0$ 处，$(0-k)(0-2k)=2k^2>0$（若 $k\neq 0$）。由于该二次式连续，存在 $\delta>0$ 使得对一切满足 $|x|<\delta$ 的 $x$，均有 $(x-k)(x-2k)>0$（当 $k\neq 0$ 时可取 $\delta<\min(|k|,|2k|)$）。于是当 $|x|<\delta$ 时，

$$g(x)=-x^2\cdot(\text{正数})\le 0,$$

且等号仅当 $x=0$ 时成立。因此沿直线 $y=kx$，$(0,0)$ 是严格局部极大值点。

若 $k=0$（直线 $y=0$），则 $g(x)=-x^4\le 0$，故 $(0,0)$ 是局部极大值点。对于垂直直线 $x=0$：$f(0,y)=-2y^2\le 0$，所以 $(0,0)$ 也是局部极大值点。综上，沿每条过 $(0,0)$ 的直线，$(0,0)$ 都是局部极大值点。

**习题 (9.5.16).** 已知平行六面体所有棱长之和为 $12a$，求其最大体积。

**解答:** 设平行六面体从同一顶点出发的三条棱长分别为 $x,y,z>0$，它们两两之间的夹角分别为 $\alpha$（$y$ 与 $z$ 之间）、$\beta$（$x$ 与 $z$ 之间）、$\gamma$（$x$ 与 $y$ 之间）。所有棱长之和为 $12a$，而平行六面体共有 12 条棱，每条棱长在 $x,y,z$ 中各出现 4 次，故

$$4(x+y+z)=12a \quad\Longrightarrow\quad x+y+z=3a. \tag{1}$$

体积 $V$ 由公式给出

$$V=xyz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}. \tag{2}$$

注意到根号内的表达式是 Gram 矩阵的行列式除以 $(xyz)^2$。由正定矩阵的 Hadamard 不等式，有

$$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant 1,$$

等号成立当且仅当 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=0$，即 $\alpha=\beta=\gamma=\pi/2$。因此对任意固定的 $x,y,z$，

$$V\leqslant xyz,$$

等号成立当且仅当平行六面体为长方体（所有角均为直角）。

于是，在棱长和固定的条件下，平行六面体的最大体积不超过 $xyz$ 在约束 $x+y+z=3a$ 下的最大值。由 AM–GM 不等式，

$$\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}=a \quad\Longrightarrow\quad xyz\leqslant a^3,$$

等号成立当且仅当 $x=y=z=a$。

综合以上，最大体积为 $a^3$，且当 $x=y=z=a$ 且 $\alpha=\beta=\gamma=\pi/2$ 时达到，即棱长为 $a$ 的立方体。由于边界情形（某棱长为零或夹角退化为 0 或 $\pi$）体积为零，故该临界点给出全局最大值。