习题 (9.1.8). 画出函数 $z=\cos(2x+y)$ 的略图以及对应于 $z=0,\pm1,\pm\frac{1}{2}$ 的等高线.

解答: 函数 $z=\cos(2x+y)$ 是一个三元函数，其图像是一个三维曲面。由于自变量线性组合 $2x+y$ 作为余弦函数的输入，该曲面在 (x,y) 平面上沿方向 $(2,1)$ 呈周期性振荡，而在垂直于 $(2,1)$ 的方向上函数值保持常数。振幅为 1，周期在方向 $(2,1)$ 上为 $2\pi/\sqrt{5}$（实际周期长度需考虑方向向量模长）。曲面整体呈波纹状，平行于直线 $2x+y=$ 常数 的截面为水平线（即等高线）。

等高线方程为 $z=c$（c 为常数），对应于直线族 $2x+y=\arccos(c)+2n\pi$ 或 $2x+y=-\arccos(c)+2n\pi$（$n\in\mathbb{Z}$）。所有等高线均为斜率为 -2 的直线。

具体等高线方程如下：

对应于 $z=0$：

$$\cos(2x+y)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+y=\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n\in\mathbb{Z},$$

即

$$y=-2x+\pi\left(n-\frac{1}{2}\right),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

对应于 $z=1$：

$$\cos(2x+y)=1 \quad\Rightarrow\quad 2x+y=2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z},$$

即

$$y=-2x+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

对应于 $z=-1$：

$$\cos(2x+y)=-1 \quad\Rightarrow\quad 2x+y=\pi(2n-1),\quad n\in\mathbb{Z},$$

即

$$y=-2x+\pi(2n-1),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

对应于 $z=\frac{1}{2}$：

$$\cos(2x+y)=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad 2x+y=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z},$$

即

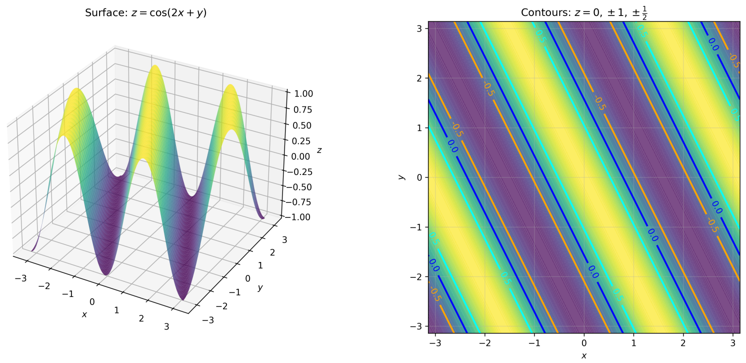
$$y=-2x+\frac{\pi}{3}+2n\pi \quad \text{或} \quad y=-2x-\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

对应于 $z=-\frac{1}{2}$：

$$\cos(2x+y)=-\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad 2x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z},$$

即

$$y=-2x+\frac{2\pi}{3}+2n\pi \quad \text{或} \quad y=-2x-\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}.$$



习题 (9.1.13). 设 $f(x, y) = x^y, \varphi(x, y) = x+y, \psi(x, y) = x-y$，求 $f[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \varphi[f(x, y), \psi(x, y)], \psi[\varphi$

解答: 设 $f(x, y) = x^y$, $\varphi(x, y) = x + y$, $\psi(x, y) = x - y$。

1. 计算 $f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$：

$$f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = (\varphi(x, y))^{\psi(x,y)} = (x + y)^{x-y}.$$

2. 计算 $\varphi[f(x, y), \psi(x, y)]$：

$$\varphi(f(x, y), \psi(x, y)) = f(x, y) + \psi(x, y) = x^y + (x - y).$$

3. 计算 $\psi[\varphi(x, y), f(x, y)]$：

$$\psi(\varphi(x, y), f(x, y)) = \varphi(x, y) - f(x, y) = (x + y) - x^y.$$

习题 (9.1.14). (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$;

(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$;

(11) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$;

(12) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}}{x+y}$.

解答:

(1). 注意到 $0 \leqslant \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leqslant \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y|$，而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|) = 0$，由夹逼定理得极限为 0。

(2). 由于 $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$，且当 $(x,y)\to(0,a)$ 时 $xy\to 0$，故

$$\frac{\sin(xy)}{x} = y\cdot\frac{\sin(xy)}{xy} \to a\cdot 1 = a.$$

所以极限为 a。

(3). 因为 $x^2+y^2 \geqslant 2xy$，所以 $\frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$，从而

$$0 \leqslant \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

当 $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$ 时 $x\to+\infty$，故 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \to 0$，由夹逼定理得极限为 0。

(4). 考虑不同路径。取 $y = x$，则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+x}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \to e^{1/2}.$$

取 $y = 2x$，则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+2x}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \to e^{1/3}.$$

路径不同极限不同，故极限不存在。

(5). 利用不等式 $|x^3| \leqslant |x|(x^2+y^2)$ 和 $|y^3| \leqslant |y|(x^2+y^2)$，得

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant |x|+|y| \to 0.$$

所以极限为 0。

(6). 由 $x^4+y^4 \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$，得

$$0 \leqslant \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leqslant \frac{x^2+y^2}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2} = \frac{2}{x^2+y^2} \to 0.$$

所以极限为 0。

(7). 注意到 $(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)} \leqslant (x+y)^2\mathrm{e}^{-(x+y)}$，令 $t = x+y$，当 $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$ 时 $t\to+\infty$，而 $t^2\mathrm{e}^{-t}\to 0$，且原式非负，由夹逼定理得极限为 0。

(8). 函数在点 $(1,0)$ 连续，直接代入得

$$\frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+\mathrm{e}^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2.$$

所以极限为 $\ln 2$。

(9). 有理化分母：

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\frac{xy\big(\sqrt{xy+1}+1\big)}{(xy+1)-1}$$
$$=\sqrt{xy+1}+1\to\sqrt{0+1}+1=2.$$

所以极限为 2。

(10). 考虑路径 $y=kx$（$k\neq-1$），则

$$\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}\sim\frac{\frac{1}{2}xy}{x+y}=\frac{k}{2(1+k)}x\to 0.$$

但存在其他路径可得不同极限。例如，取常数 $c\neq 0$，构造路径使得 $\frac{xy}{x+y}=c$（如 $x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=\frac{cx_n}{x_n-c}$），则原式 $\to\frac{c}{2}$。由于不同 c 对应不同极限，故极限不存在。

(11). 由泰勒展开 $1-\cos u\sim\frac{1}{2}u^2$（$u\to 0$），取 $u=x^2+y^2$，则

$$\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}\sim\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\to+\infty.$$

所以极限为 $+\infty$。

(12). 考虑不同路径。取 $y=x$（$x>0$），则

$$\frac{(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}}{x+y}=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2x}}}{2x}\sim\frac{1}{2x}\to+\infty.$$

取 $y=-2x$（$x>0$），则 $x+y=-x<0$，

$$\frac{(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}}{x+y}=\frac{(1-2x^2)^{-\frac{1}{x}}}{-x}\sim-\frac{1}{x}\to-\infty.$$

路径不同极限不同，故极限不存在。

习题 (9.1.17). 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x-y}, & x\neq y,\\ 0, & x=y;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0.\end{cases}$

解答:

1. 函数在 $x \neq y$ 时连续。在 $x = y$ 上任意一点 (a, a)，考虑极限 $\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{xy}{x-y}$。若 $a \neq 0$，沿路径 $y = a$（$x \neq a$），有

$$f(x, a) = \frac{ax}{x-a} \to \infty \quad (x \to a),$$

极限不存在，故不连续。若 $a = 0$，沿路径 $y = x + x^2$（$x \neq 0$），有

$$f(x, x + x^2) = \frac{x(x + x^2)}{-x^2} = -1 - x \to -1 \quad (x \to 0),$$

而沿 $y = x$ 时 $f = 0$，极限不唯一，故也不连续。因此，函数在直线 $x = y$ 上处处不连续，在其他点连续。

2. 当 $y \neq 0$ 时，$x \sin \frac{1}{y}$ 连续。在 $y = 0$ 上：
   - 在 $(0, 0)$ 处，由于 $|x \sin \frac{1}{y}| \leq |x|$，有 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0 = f(0, 0)$，故连续。
   - 在 $(a, 0)$（$a \neq 0$）处，沿路径 $x = a$，$y \to 0$，有

   $$f(a, y) = a \sin \frac{1}{y}$$

   震荡无极限，故不连续。

   因此，函数在原点连续，在 $y = 0$（$x \neq 0$）上不连续，在其他点连续。

3. 在 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时，函数为有理函数且分母非零，故连续。在 $(0, 0)$ 处，用极坐标：

$$f = r \cos^2 \theta \sin \theta, \quad |f| \leq r \to 0 \quad (r \to 0),$$

所以 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$，故连续。因此，函数在整个 $\mathbb{R}^2$ 上连续。

4. 函数在 $x + y \neq 0$ 时连续。在 $x + y = 0$ 上：
   - 在 $(0, 0)$ 处，沿路径 $y = mx$（$m \neq -1$），有

   $$f = \frac{1-m}{1+m},$$

   极限随 m 变化，故极限不存在，不连续。
   - 在 $(a, -a)$（$a \neq 0$）处，沿路径 $y = -a$，有

   $$f(x, -a) = \frac{x+a}{x-a} \to \infty \quad (x \to a),$$

   极限不存在，故不连续。

   因此，函数在直线 $x + y = 0$ 上处处不连续，在其他点连续。

习题 (9.1.18). 证明：函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 沿着过此点的每一射线 $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha$ $(0 \leqslant t < +\infty)$ 连续，即 $\lim_{t\to 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$. 但此函数在点 $(0, 0)$ 并不连续.

解答: 首先证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 沿任何过此点的射线连续。设射线参数方程为 $x=t\cos\alpha,\ y=t\sin\alpha$（$t\geqslant 0$），则当 $t>0$ 时，

$$\begin{aligned}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)&=\frac{(t\cos\alpha)^2\cdot t\sin\alpha}{(t\cos\alpha)^4+(t\sin\alpha)^2}\\&=\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}\\&=\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}.\end{aligned}$$

考虑极限 $t\to 0$：

- 若 $\sin\alpha\neq 0$，则分母趋于 $\sin^2\alpha\neq 0$，分子趋于 0，故极限为 0。
- 若 $\sin\alpha=0$（即射线沿 x 轴），则 $f(t\cos\alpha,0)=0$，极限也为 0。

因此对任意 α，均有

$$\lim_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0=f(0,0),$$

即 f 在 $(0,0)$ 沿每一射线连续。

其次证明 f 在 $(0,0)$ 不连续。考虑路径 $y=x^2$（$x\neq 0$），代入得

$$\begin{aligned}f(x,x^2)&=\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2}\\&=\frac{x^4}{x^4+x^4}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故当 $x\to 0$ 时，$f(x,x^2)\to\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$，即沿该路径极限不为 0，所以 f 在 $(0,0)$ 不连续。

综上，函数在点 $(0,0)$ 沿所有射线连续，但在该点不连续。

习题 (9.1.19). 设 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上分别对 x 和 y 连续，且关于变量 y 是单调的，证明：$f(x,y)$ 在 D 上连续.

解答: 设 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上分别对 x 和 y 连续，且关于变量 y 单调。不妨设 f 关于 y 单调不减（若单调不增，考虑 $-f$，结论相同）。以下证明 f 在 D 上连续。

任取 $(x_0,y_0)\in D$。由于 f 分别连续，通常 D 是开区域，故存在 $r>0$，使得矩形 $[x_0-r,x_0+r]\times[y_0-r,y_0+r]\subset D$。在此矩形内讨论。

对任意 $\varepsilon>0$，由 $f(x_0,\cdot)$ 在 y_0 连续，存在 $\eta>0$（可取 $\eta<r$），使得当 $|y-y_0|<\eta$ 时，

$$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $y_1=y_0-\eta/2$，$y_2=y_0+\eta/2$，则 $y_1<y_0<y_2$，且 $(x_0,y_1),(x_0,y_2)\in D$。

由 $f(\cdot,y_1)$ 和 $f(\cdot,y_2)$ 在 x_0 连续，存在 $\delta_1>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，

$$|f(x,y_1)-f(x_0,y_1)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x,y_2)-f(x_0,y_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\eta/2\}>0$。对任意 $(x,y)\in D$ 满足 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，有

$$y_1<y<y_2.$$

由于 f 关于 y 单调不减，

$$f(x,y_1) \le f(x,y) \le f(x,y_2). \tag{1}$$

结合前述估计：

$$\begin{aligned}
f(x,y_1) &> f(x_0,y_1) - \frac{\varepsilon}{2} > \left(f(x_0,y_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = f(x_0,y_0) - \varepsilon,\\
f(x,y_2) &< f(x_0,y_2) + \frac{\varepsilon}{2} < \left(f(x_0,y_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = f(x_0,y_0) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中用到了 $|f(x_0,y_i) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon/2$（$i=1,2$）。代入 (1) 得

$$f(x_0,y_0) - \varepsilon < f(x,y) < f(x_0,y_0) + \varepsilon,$$

即 $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$。

故 f 在 (x_0,y_0) 连续。由 (x_0,y_0) 的任意性，f 在 D 上连续。

若 f 关于 y 单调不增，考虑 $-f$ 即得证。

习题 (9.1.23). 设 $f(x,y) = \frac{1}{1-xy}$, $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$, $(x,y) \neq (1,1)$, ，证明：函数 $f(x,y)$ 连续但不一致连续.

解答: （1）连续性：对任意 $(x_0,y_0) \in [0,1]\times[0,1]$ 且 $(x_0,y_0) \neq (1,1)$，有 $1 - x_0y_0 \neq 0$。由于多项式 xy 连续，故 $1-xy$ 连续，在非零点处倒数函数连续，因此 $f(x,y) = \frac{1}{1-xy}$ 在 (x_0,y_0) 连续。由 (x_0,y_0) 的任意性知 f 在定义域上连续。

（2）不一致连续性：构造点列

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), \quad Q_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right), \quad n \ge 2.$$

显然 $P_n, Q_n \in [0,1)\times[0,1) \subset$ 定义域。计算距离

$$\|P_n - Q_n\| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

计算函数值之差

$$\begin{aligned}
|f(P_n) - f(Q_n)| &= \left|\frac{1}{1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2} - \frac{1}{1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\right|\\
&= \frac{n-1}{2(2n-1)}.
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{n-1}{2(2n-1)} \to \frac{1}{4}.$$

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{8} > 0$，对任意 $\delta > 0$，存在充分大的 n 使得 $\frac{1}{n(n+1)} < \delta$，且 $\frac{n-1}{2(2n-1)} > \frac{1}{8}$。于是

$$\|P_n - Q_n\| < \delta, \quad |f(P_n) - f(Q_n)| > \varepsilon_0.$$

故 f 在定义域上不一致连续。

习题 (9.2.3). 设 $f(x,y)=\int_1^{x^2y}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ ，求 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$.

解答: 设函数 $f(x,y)=\int_1^{x^2y}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$。令 $u=x^2y$，则 $f(x,y)=F(u)$，其中 $F(u)=\int_1^{u}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$。由微积分基本定理，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}=\frac{\sin u}{u}$。

应用链式法则求偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin u}{u}\cdot(2xy)=\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot 2xy=\frac{2\sin(x^2y)}{x}\quad(x\neq 0),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\sin u}{u}\cdot(x^2)=\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot x^2=\frac{\sin(x^2y)}{y}\quad(y\neq 0).$$

因此，所求偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2\sin(x^2y)}{x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sin(x^2y)}{y}.$$

习题 (9.2.5). 证明：函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续但偏导数不存在.

解答: 考虑函数 $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，且 $f(0,0)=0$。

连续性： 对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\sqrt{x^2+y^2}-0\right|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon.$$

由极限定义，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0),$$

故函数在 $(0,0)$ 连续。

偏导数不存在： 按偏导数定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$
$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{0^2+k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{|k|}{k}.$$

对于 $f_x(0,0)$，当 $h\to 0^+$ 时 $\frac{|h|}{h}=1$，当 $h\to 0^-$ 时 $\frac{|h|}{h}=-1$，故极限不存在。同理，$f_y(0,0)$ 的极限也不存在。因此，函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续但偏导数不存在。

习题 (9.2.9). 在下列各题中，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(2) $z=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$;
(4) $z=\sin^2(ax+by)$;
(6) $z=\arcsin(xy)$.

解答:

2. 对于 $z=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，利用恒等式 $z=\arctan x+\arctan y$（在定义域内），得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}.$$

进而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+y^2}\right)=0,\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1+y^2}\right)=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}.\end{aligned}$$

4. 对于 $z=\sin^2(ax+by)$，先求一阶偏导数：

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2\sin(ax+by)\cos(ax+by)\cdot a=a\sin(2(ax+by)),\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=2\sin(ax+by)\cos(ax+by)\cdot b=b\sin(2(ax+by)).\end{aligned}$$

然后求二阶偏导数：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\big(a\sin(2(ax+by))\big)=a\cdot\cos(2(ax+by))\cdot 2a=2a^2\cos(2(ax+by)),\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\big(b\sin(2(ax+by))\big)=b\cdot\cos(2(ax+by))\cdot 2a=2ab\cos(2(ax+by)),\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\big(b\sin(2(ax+by))\big)=b\cdot\cos(2(ax+by))\cdot 2b=2b^2\cos(2(ax+by)).\end{aligned}$$

6. 对于 $z=\arcsin(xy)$（定义域：$|xy|<1$），一阶偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

二阶偏导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)=y\cdot\frac{xy^2}{(1-x^2y^2)^{3/2}}=\frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{3/2}},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\frac{x^2y^2}{(1-x^2y^2)^{3/2}}=\frac{1}{(1-x^2y^2)^{3/2}},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)=x\cdot\frac{x^2y}{(1-x^2y^2)^{3/2}}=\frac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

习题 (9.2.11). 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明：当 $r\neq 0$ 时有

(1) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$;

(2) $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}$;

(3) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}=0.$

解答: 由 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$r\neq 0$。

(1). 先求一阶偏导数：

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}.$$

再求二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{y^2+z^2}{r^3}.$$

由对称性，

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2}{r^3}.$$

求和得：

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{r^3}=\frac{2r^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

(2). 令 $u=\ln r$。则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{r^2}.$$

二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right)=\frac{-x^2+y^2+z^2}{r^4}.$$

由对称性，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2+z^2}{r^4},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{r^4}.$$

求和得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^4}=\frac{r^2}{r^4}=\frac{1}{r^2}.$$

(3). 令 $v=\frac{1}{r}$。则

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}.$$

二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=\frac{2x^2-y^2-z^2}{r^5}.$$

由对称性，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{-x^2+2y^2-z^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{-x^2-y^2+2z^2}{r^5}.$$

求和得：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0.$$

以上计算均在 $r\neq 0$ 时成立。

习题 (9.2.12). 设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：函数的二阶偏导数存在，但所有二阶偏导数（特别是两个混合偏导数）在 $(0,0)$ 不连续，且 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$（这个例子说明，该函数在一点分别对 x 和 y 求导的次序不能交换，这是不连续引起的）。

解答: 首先计算一阶偏导数。在原点，由定义：

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\qquad f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0.$$

在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处，直接求导得

$$f_x(x,y)=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y(x,y)=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

故一阶偏导数处处存在。

其次，计算二阶偏导数在原点处的值。由定义：

$$\begin{aligned}f_{xx}(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h}=0,\\ f_{yy}(0,0)&=\lim_{k\to 0}\frac{f_y(0,k)-f_y(0,0)}{k}=0,\\ f_{xy}(0,0)&=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-k}{k}=-1,\\ f_{yx}(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.\end{aligned}$$

因此二阶偏导数在原点存在，且 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$。

最后，证明所有二阶偏导数在原点不连续。在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处，

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y)&=-\frac{4xy^3(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3},\\ f_{yy}(x,y)&=\frac{4x^3y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3},\\ f_{xy}(x,y)&=f_{yx}(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}.\end{aligned}$$

考察极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{xx}(x,y)$：沿 $y=x$，

$$\lim_{x\to 0}f_{xx}(x,x)=-\frac{4x\cdot x^3(x^2-3x^2)}{(2x^2)^3}=1,$$

沿 $y=0$，$f_{xx}(x,0)=0$，故极限不存在，f_{xx} 在原点不连续。

类似地，对 f_{yy}：沿 $y=x$，

$$\lim_{x\to 0}f_{yy}(x,x)=\frac{4x^3\cdot x(x^2-3x^2)}{(2x^2)^3}=-1,$$

沿 $x=0$，$f_{yy}(0,y)=0$，故极限不存在，f_{yy} 在原点不连续。

对混合偏导函数 $g(x,y)=f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$，沿射线 $y=mx$（$x\neq 0$），

$$\lim_{x\to 0} g(x,mx)=\frac{(1-m^2)(1+10m^2+m^4)}{(1+m^2)^3},$$

其值依赖于 m。例如：$m=0$ 时极限为 1，$m=1$ 时极限为 0，$m\to\infty$（即沿 y 轴）极限为 -1。故 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ 不存在。因此，分别以 $f_{xy}(0,0)=-1$ 和 $f_{yx}(0,0)=1$ 定义的函数在原点均不连续。

综上所述，函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数在原点存在但不连续，且混合偏导数不相等。