**习题 (8.1.3).** 判断下列结论是否成立，并举例说明：

(1) 若 $a \cdot b = 0$，则 $a = 0$ 或 $b = 0$；(2) 若 $a \times c = a \times b$，则必有 $c = b$；(3) 两单位向量的数量积必等于 1，向量积必等于一单位向量；(4) $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$；(5) $|a \cdot b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$；(6) $(a+b) \times (a+b) = a \times a + 2a \times b + b \times b$.

**解答:**

1. 不成立。例如取 $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,1,0)$，则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$，但 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$。
2. 不成立。例如取 $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,1,0)$，令 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \lambda \boldsymbol{a}$，其中 $\lambda \neq 0$，比如 $\lambda = 1$，则 $\boldsymbol{c} = (1,1,0)$。计算得 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (0,0,1)$，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = (0,0,1)$，故 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，但 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{b}$。
3. 不成立。数量积：取两单位向量 $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,1,0)$，则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \neq 1$。向量积：取 $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (1,0,0)$，则 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 不是单位向量；或取夹角非直角的单位向量，叉积的模长不为 1。
4. 不成立。例如取 $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{c} = (0,1,0)$，则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1$，$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (0,1,0)$；而 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$，两者不相等。
5. 不成立。由柯西–施瓦茨不等式，$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|^2 \leq ||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||$，等号当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时成立。反例：取 $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,1,0)$，则 $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|^2 = 0$，$||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}|| = 1$，不相等。
6. 不成立。计算左边：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} \\ &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

由于叉积反交换：$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，故左边 $= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$。右边：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} + 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

要使 $\boldsymbol{0} = 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，需 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行。一般情况不成立，例如取 $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,1,0)$，则左边 $= \boldsymbol{0}$，右边 $= 2(0,0,1) = (0,0,2)$，不相等。

**习题 (8.1.23).** 已知点 $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

**解答:** 三角形面积可由向量叉积的模的一半计算。首先计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (3-1,\ 0-2,\ -3-0) = (2,\ -2,\ -3), \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = (5-1,\ 2-2,\ 6-0) = (4,\ 0,\ 6).\end{aligned}$$

计算叉积 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \big((-2)\cdot 6 - (-3)\cdot 0,\ (-3)\cdot 4 - 2\cdot 6,\ 2\cdot 0 - (-2)\cdot 4\big) \\ &= (-12,\ -24,\ 8).\end{aligned}$$

叉积的模为：

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| &= \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{144 + 576 + 64} = \sqrt{784} = 28.\end{aligned}$$

因此 $\triangle ABC$ 的面积为：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \times 28 = 14.$$

**习题 (8.1.26).** 判断下列四点：$A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(2,1,3)$ 是否在一个平面上？

**解答:** 四点 $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ 共面的充要条件是从同一点出发到其余三点的三个向量共面，即它们的混合积（行列式）为零。

以点 $A$ 为基点，构造向量：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= B - A = (0-1,\ 1-2,\ 5-(-1)) = (-1,\ -1,\ 6),\\
\overrightarrow{AC} &= C - A = (-1-1,\ 2-2,\ 1-(-1)) = (-2,\ 0,\ 2),\\
\overrightarrow{AD} &= D - A = (2-1,\ 1-2,\ 3-(-1)) = (1,\ -1,\ 4).
\end{aligned}$$

计算这三个向量的行列式：

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 0\cdot 4+(-1)\cdot 2\cdot 1+6\cdot(-2)\cdot(-1)-6\cdot 0\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot(-1)-(-1)\cdot(-2)\cdot 4.$$

逐项计算：

$$\begin{aligned}
&(-1)\cdot 0\cdot 4 = 0,\\
&(-1)\cdot 2\cdot 1 = -2,\\
&6\cdot(-2)\cdot(-1) = 12,\\
&6\cdot 0\cdot 1 = 0,\\
&(-1)\cdot 2\cdot(-1) = 2,\\
&(-1)\cdot(-2)\cdot 4 = 8.
\end{aligned}$$

代入得：

$$\text{行列式} = 0 + (-2) + 12 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

行列式为零，故向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 共面，从而四点 $A$, $B$, $C$, $D$ 在同一平面上。

**习题 (8.1.29).** 在 $Oyz$ 平面上求一点 $P$, 使它与三已知点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$ 及 $C(0,5,1)$ 等距离.

**解答:** 由于点 $P$ 在 $Oyz$ 平面上，设 $P$ 的坐标为 $(0,y,z)$。点 $P$ 与 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$, $C(0,5,1)$ 等距，即 $|PA| = |PB| = |PC|$。考虑距离的平方，得：

$$\begin{aligned}
(0-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 &= (0-4)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2,\\
(0-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 &= (0-0)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2.
\end{aligned}$$

由第一个方程化简得：

$$z=-\frac{3y}{4}-\frac{5}{4}. \tag{1}$$

由第二个方程化简得：

$$z=4y-6. \tag{2}$$

联立 (1) 和 (2)：

$$-\frac{3y}{4}-\frac{5}{4}=4y-6.$$

乘以 4：

$$\begin{aligned}-3y-5&=16y-24,\\ -19y&=-19,\end{aligned}$$

所以 $y=1$。代入 (2) 得 $z=4\times 1-6=-2$。因此所求点为 $P(0,1,-2)$。验证：$|PA|^2=(0-3)^2+(1-1)^2+(-2-2)^2=9+0+16=25$，$|PB|^2=(0-4)^2+(1+2)^2+(-2+2)^2=16+9+0=25$，$|PC|^2=(0-0)^2+(1-5)^2+(-2-1)^2=0+16+9=25$，故等距成立。

**习题 (8.2.5).** 求通过点 $M(3,-1,1)$ 且同时垂直于两个平面 $2x-z+1=0$ 和 $y=0$ 的平面方程.

**解答:** 所求平面需过点 $M(3,-1,1)$ 且垂直于平面 $2x-z+1=0$ 和 $y=0$，故其法向量 $\boldsymbol{n}$ 同时垂直于两给定平面的法向量。

平面 $2x-z+1=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(2,0,-1)$，平面 $y=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$。取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，计算得：

$$\boldsymbol{n}=(2,0,-1)\times(0,1,0)=(1,0,2)$$

由点法式，过点 $M(3,-1,1)$ 且法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$ 的平面方程为：

$$1\cdot(x-3)+0\cdot(y+1)+2\cdot(z-1)=0,$$

化简得：

$$x-3+2z-2=0\quad\Rightarrow\quad x+2z-5=0$$

**习题 (8.2.10).** 试判定点 $M(2,-1,1)$ 与原点在下列平面的同侧还是异侧：(1) $5x+3y+z-18=0$; (2) $x+5y+12z-1=0$.

**解答:** 对于平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$，两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 位于平面同侧的充要条件是 $(Ax_1+By_1+Cz_1+D)(Ax_2+By_2+Cz_2+D)>0$；位于异侧的充要条件是乘积小于 0。

1. 平面 $5x+3y+z-18=0$。代入点 $M(2,-1,1)$：

$$5\times 2+3\times(-1)+1-18=10-3+1-18=-10.$$

代入原点 $O(0,0,0)$：

$$5\times 0+3\times 0+0-18=-18.$$

两值同号（均为负），故点 $M$ 与原点在平面同侧。

2. 平面 $x+5y+12z-1=0$。代入点 $M(2,-1,1)$：
$$2+5\times(-1)+12\times 1-1=2-5+12-1=8.$$
代入原点 $O(0,0,0)$：
$$0+5\times 0+12\times 0-1=-1.$$
两值异号（一正一负），故点 $M$ 与原点在平面异侧。

**习题 (8.2.13).** 在平面 $x+y+z-1=0$ 与三坐标平面所围成的四面体内求一点，使它到四个面的距离相等.

**解答:** 设所求点为 $(x,y,z)$，它在四面体内，故 $x>0, y>0, z>0$，且 $x+y+z-1<0$。

点到四个平面的距离: 到平面 $x=0$ 的距离为 $x$，到平面 $y=0$ 的距离为 $y$，到平面 $z=0$ 的距离为 $z$，到平面 $x+y+z-1=0$ 的距离为 $\frac{|x+y+z-1|}{\sqrt{3}}=\frac{1-x-y-z}{\sqrt{3}}$（因 $x+y+z-1<0$）。

令四个距离相等，设共同值为 $d>0$，则
$$x=d,\quad y=d,\quad z=d,\quad \frac{1-3d}{\sqrt{3}}=d.$$
由 $\frac{1-3d}{\sqrt{3}}=d$ 得
$$\begin{aligned}1-3d&=\sqrt{3}d,\\ 1&=(3+\sqrt{3})d,\\ d&=\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$
因此
$$x=y=z=\frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$
验证：$x+y+z=\frac{3(3-\sqrt{3})}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}<1$，满足内部条件。

故所求点为 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$。

**习题 (8.2.16).** 求直线 $\left\{\begin{array}{l}2x+3y-z-4=0,\\ 3x-5y+2z+1=0\end{array}\right.$ 的参数方程.

**解答:** 将平面方程化为标准形式：
$$\begin{cases}2x+3y-z=4,\\ 3x-5y+2z=-1.\end{cases}$$
为求直线的参数方程，取方向向量为两平面法向量的叉积。法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(2,3,-1)$，$\boldsymbol{n}_2=(3,-5,2)$，则方向向量
$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 2&3&-1\\ 3&-5&2\end{vmatrix}\\ &=\boldsymbol{i}(3\cdot 2-(-1)\cdot(-5))-\boldsymbol{j}(2\cdot 2-(-1)\cdot 3)+\boldsymbol{k}(2\cdot(-5)-3\cdot 3)\\ &=\boldsymbol{i}(6-5)-\boldsymbol{j}(4+3)+\boldsymbol{k}(-10-9)\\ &=(1,\ -7,\ -19).\end{aligned}$$

再求直线上一点。令 $z=0$，代入方程组

$$\begin{cases}2x+3y=4,\\3x-5y=-1.\end{cases}$$

解得 $y=\dfrac{14}{19}$，$x=\dfrac{17}{19}$，得点 $P_0\left(\dfrac{17}{19},\dfrac{14}{19},0\right)$。为消去分母，取 $z=-2$，代入原方程解得 $x=1$，$y=0$，得点 $P(1,0,-2)$。因此直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=1+t,\\y=-7t, & t\in\mathbb{R}.\\z=-2-19t,\end{cases}$$

**习题 (8.2.21).** 求下列直线和平面的夹角 $\varphi$:

(1) $\begin{cases}3x-2y=24,\\3x-z=-4,\end{cases}$ $6x+15y-10z+31=0$;

(2) $\begin{cases}x+y+3z=0,\\x-y-z=0,\end{cases}$ $x-y-z+1=0$.

**解答:** 对于 (1)：直线的方向向量由两平面法向量的叉积得到。平面 $3x-2y=24$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(3,-2,0)$，平面 $3x-z=-4$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(3,0,-1)$，则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(2,\ 3,\ 6).$$

其模 $||\boldsymbol{v}||=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$。平面 $6x+15y-10z+31=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(6,\ 15,\ -10)$，其模 $||\boldsymbol{n}||=\sqrt{6^2+15^2+(-10)^2}=19$。计算点积

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=2\times6+3\times15+6\times(-10)=-3,$$

故 $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|=3$。直线与平面的夹角 $\varphi$ 满足

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|}{||\boldsymbol{v}||\ ||\boldsymbol{n}||}=\frac{3}{7\times19}=\frac{3}{133},$$

因此

$$\varphi=\arcsin\frac{3}{133}.$$

对于 (2)：直线的方向向量由两平面法向量的叉积得到。平面 $x+y+3z=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,\ 1,\ 3)$，平面 $x-y-z=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,\ -1,\ -1)$，则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(2,\ 4,\ -2).$$

其模 $||\boldsymbol{v}||=\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$。平面 $x-y-z+1=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\ -1,\ -1)$，其模 $||\boldsymbol{n}||=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$。计算点积

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+4\times(-1)+(-2)\times(-1)=0,$$

故 $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|=0$。直线与平面的夹角 $\varphi$ 满足

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|}{||\boldsymbol{v}||\ ||\boldsymbol{n}||}=0,$$

因此

$$\varphi=0.$$

此时直线方向向量与平面法向量垂直，直线与平面平行。

**习题 (8.2.28).** 求点 $(2,3,1)$ 在直线 $x=t-7$, $y=2t-2$, $z=3t-2$ 上的投影.

**解答:** 设直线的参数方程为 $x=t-7$, $y=2t-2$, $z=3t-2$, 其方向向量为 $\boldsymbol{d}=(1,2,3)$. 已知点 $P(2,3,1)$. 设直线上动点 $Q$ 对应的参数为 $t$, 即 $Q(t-7,\,2t-2,\,3t-2)$. 则向量 $\overrightarrow{QP}$ 为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP}&=(2-(t-7),\,3-(2t-2),\,1-(3t-2))\\&=(9-t,\,5-2t,\,3-3t).\end{aligned}$$

由 $\overrightarrow{QP}$ 与方向向量 $\boldsymbol{d}$ 垂直, 有 $\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{d}=0$, 即

$$(9-t)\cdot1+(5-2t)\cdot2+(3-3t)\cdot3=0.$$

计算得

$$(9-t)+(10-4t)+(9-9t)=28-14t=0,$$

解得 $t=2$. 将 $t=2$ 代入直线的参数方程, 得投影点坐标为

$$\begin{aligned}x&=2-7=-5,\\y&=2\cdot2-2=2,\\z&=3\cdot2-2=4.\end{aligned}$$

故所求投影点为 $(-5,2,4)$.

**习题 (8.2.30).** 求点 $(1,2,3)$ 关于直线 $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 对称的点的坐标.

**解答:** 直线方程为 $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$，方向向量 $\boldsymbol{d}=(1,-3,-2)$，过点 $(0,4,3)$。设参数 $t$，则直线上任一点可表示为

$$Q(t,\,4-3t,\,3-2t).$$

点 $P(1,2,3)$ 到直线的垂足 $Q$ 满足 $\overrightarrow{PQ}\perp\boldsymbol{d}$，其中

$$\overrightarrow{PQ}=(t-1,\,2-3t,\,-2t).$$

由垂直条件得点积为零：

$$\begin{aligned}(t-1)\cdot1+(2-3t)\cdot(-3)+(-2t)\cdot(-2)&=0,\\t-1-6+9t+4t&=0,\\14t-7&=0,\end{aligned}$$

解得 $t=\frac{1}{2}$。代入 $Q$ 的表达式得垂足坐标

$$Q\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},2\right).$$

对称点 $P'$ 满足 $Q$ 为 $PP'$ 的中点，故 $P'=2Q-P$，计算得

$$\begin{aligned}x'&=2\cdot\frac{1}{2}-1=0,\\ y'&=2\cdot\frac{5}{2}-2=3,\\ z'&=2\cdot 2-3=1.\end{aligned}$$

因此，所求对称点的坐标为 $(0,3,1)$。

**习题 (8.3.3).** 求下列旋转曲面的方程，并指出它们的名称.

(1) 曲线 $\begin{cases}y^2-\frac{z^2}{4}=1,\\ x=0\end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周；

(2) 曲线 $\begin{cases}y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi),\\ z=0\end{cases}$ 绕 $x$ 轴旋转一周；

(3) 曲线 $\begin{cases}4x^2+9y^2=36,\\ z=0\end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转一周.

**解答:**

1. 曲线 $\begin{cases}y^2-\frac{z^2}{4}=1,\\ x=0\end{cases}$ 在 $yz$ 平面内，绕 $z$ 轴旋转。旋转曲面上任意点 $(x,y,z)$ 到 $z$ 轴的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，应等于原曲线上对应点到 $z$ 轴的距离 $|y|$。将原方程中的 $y^2$ 替换为 $x^2+y^2$，得

   $$x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1.$$

   整理为

   $$4x^2+4y^2-z^2=4.$$

   此为旋转单叶双曲面。

2. 曲线 $\begin{cases}y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi),\\ z=0\end{cases}$ 在 $xy$ 平面内，绕 $x$ 轴旋转。旋转曲面上任意点 $(x,y,z)$ 到 $x$ 轴的距离为 $\sqrt{y^2+z^2}$，应等于原曲线上对应点到 $x$ 轴的距离 $|\sin x|$。由于在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上 $\sin x\geqslant 0$，故有

   $$\sqrt{y^2+z^2}=\sin x.$$

   两边平方得

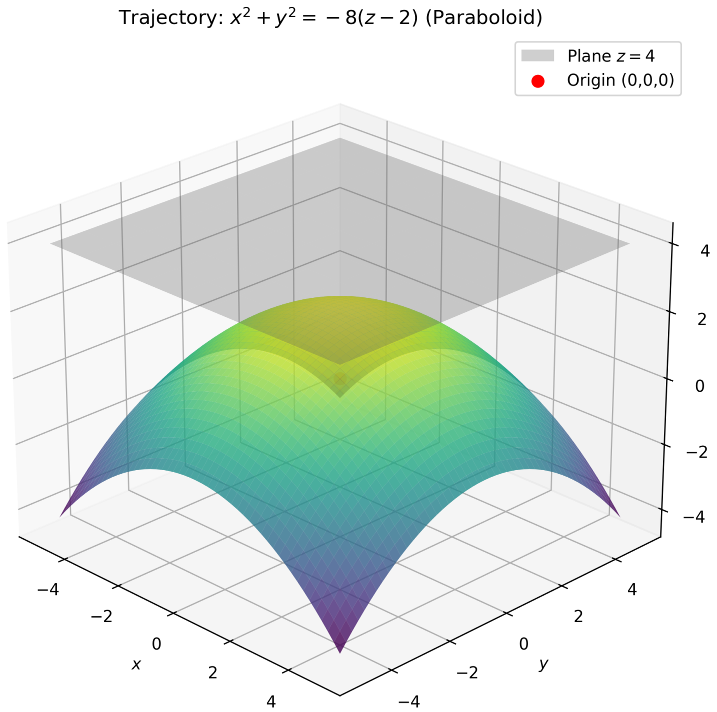
   $$y^2+z^2=\sin^2 x.$$

   此为将正弦曲线绕 $x$ 轴旋转所得的旋转曲面，可称为正弦旋转面。

3. 曲线 $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36, \\ z=0 \end{cases}$ 在 $xy$ 平面内，绕 $y$ 轴旋转。旋转曲面上任意点 $(x,y,z)$ 到 $y$ 轴的距离为 $\sqrt{x^2+z^2}$，应等于原曲线上对应点到 $y$ 轴的距离 $|x|$。将原方程中的 $x^2$ 替换为 $x^2+z^2$，得
$$4(x^2+z^2)+9y^2=36.$$
整理为
$$4x^2+9y^2+4z^2=36,$$
或
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1.$$
此为旋转椭球面。

**习题 (8.3.8).** 一动点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离，试求此动点 $P$ 的轨迹，并判定它是什么曲面.

**解答:** 设动点 $P(x,y,z)$，其到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
到平面 $z=4$ 的距离为
$$|z-4|.$$
由题意，
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|z-4|.$$
两边平方得
$$x^2+y^2+z^2=(z-4)^2.$$
展开右边：
$$x^2+y^2+z^2=z^2-8z+16.$$
消去 $z^2$ 并整理：
$$x^2+y^2=-8z+16,$$
即
$$x^2+y^2+8z-16=0.$$
亦可写为
$$z=2-\frac{x^2+y^2}{8}.$$
此方程为旋转抛物面的标准形式 $x^2+y^2=-8(z-2)$，顶点在 $(0,0,2)$，开口向下。故动点 $P$ 的轨迹是旋转抛物面。




**习题 (8.4.3).** 通过坐标旋转，化简方程 $5x^2-3y^2+3z^2+8yz-5=0$，并指出它是什么曲面.

**解答:** 二次型部分为 $Q(x,y,z)=5x^2-3y^2+3z^2+8yz$，对应的对称矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}.$$

求 $A$ 的特征值与特征向量。特征多项式为

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda&0&0\\0&-3-\lambda&4\\0&4&3-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}-3-\lambda&4\\4&3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(5-\lambda)\big[(-3-\lambda)(3-\lambda)-16\big]=(5-\lambda)(\lambda^2-25)=(5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5).$$

特征值为 $\lambda_1=-5$，$\lambda_2=5$（二重）。

对于 $\lambda_1=-5$，解 $(A+5I)\boldsymbol{v}=0$：

$$\begin{pmatrix}10&0&0\\0&2&4\\0&4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\Longrightarrow \boldsymbol{v}_1=(0,-2,1).$$

对于 $\lambda_2=5$，解 $(A-5I)\boldsymbol{v}=0$：

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-8&4\\0&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\Longrightarrow \boldsymbol{v}_2=(0,1,2),\quad \boldsymbol{v}_3=(1,0,0).$$

特征向量 $\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{v}_3$ 正交。将特征向量单位化：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(0,-2,1),\\ \boldsymbol{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2),\\ \boldsymbol{u}_3 &= (1,0,0).\end{aligned}$$

构造正交矩阵 $P$，取列向量顺序为 $\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1$（对应特征值 $5, 5, -5$），则

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \det(P) = 1.$$

令坐标旋转 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$，则二次型化为

$$Q = \boldsymbol{x}'^T (P^T A P) \boldsymbol{x}' = 5x'^2 + 5y'^2 - 5z'^2.$$

原方程 $5x^2 - 3y^2 + 3z^2 + 8yz - 5 = 0$ 变为

$$5x'^2 + 5y'^2 - 5z'^2 = 5,$$

即

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1.$$

此为单叶双曲面（旋转单叶双曲面）。

**习题 (8.4.9).** 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的一个参数方程表示.

**解答:** 椭球面类似于球面，但在每个坐标轴方向上有不同的半径（半轴长度分别为 $a$, $b$, $c$）。对于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，常见的参数方程是

$$x = \sin\theta\cos\phi, \quad y = \sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\theta,$$

其中 $\theta \in [0, \pi]$ 是极角，$\phi \in [0, 2\pi)$ 是方位角。

对于椭球面，可以通过缩放坐标来得到参数方程：令

$$x = a\sin\theta\cos\phi, \quad y = b\sin\theta\sin\phi, \quad z = c\cos\theta.$$

验证如下：

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \frac{(a\sin\theta\cos\phi)^2}{a^2} + \frac{(b\sin\theta\sin\phi)^2}{b^2} + \frac{(c\cos\theta)^2}{c^2} \\ &= \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta \\ &= \sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta \\ &= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.\end{aligned}$$

因此这是一个有效的参数方程，通常参数范围取 $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$。

**习题 (8.4.11).** 分别求单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

和双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

的一个参数方程表示.

**解答:** 对于单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，一个参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cosh u\cos v, \\ y=b\cosh u\sin v, \qquad\qquad u\in\mathbb{R},\ v\in[0,2\pi). \\ z=c\sinh u, \end{cases}$$

验证：代入方程得

$$\begin{aligned} \frac{(a\cosh u\cos v)^2}{a^2}+\frac{(b\cosh u\sin v)^2}{b^2}-\frac{(c\sinh u)^2}{c^2} &= \cosh^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v)-\sinh^2 u \\ &= \cosh^2 u-\sinh^2 u=1. \end{aligned}$$

因此该参数方程满足原方程。

对于双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$，一个参数方程（表示上叶 $z\geqslant c$）为

$$\begin{cases} x=a\sinh u\cos v, \\ y=b\sinh u\sin v, \qquad\qquad u\in\mathbb{R},\ v\in[0,2\pi). \\ z=c\cosh u, \end{cases}$$

验证：代入方程得

$$\begin{aligned} \frac{(a\sinh u\cos v)^2}{a^2}+\frac{(b\sinh u\sin v)^2}{b^2}-\frac{(c\cosh u)^2}{c^2} &= \sinh^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v)-\cosh^2 u \\ &= \sinh^2 u-\cosh^2 u=-1. \end{aligned}$$

因此该参数方程满足原方程。

**习题 (9.1.3).** 证明：满足 $y>ax+b$ 的所有点 $(x,y)$ 是一个开集. 在坐标平面上画出它的范围，并求它的边界点应满足的关系.

**解答:** 证明：设 $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>ax+b\}$。考虑函数 $f(x,y)=y-ax-b$，则 $f$ 是连续函数（因为它是多项式）。由于 $S=f^{-1}\big((0,+\infty)\big)$，而 $(0,+\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集，连续函数的原像保持开性，故 $S$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集。

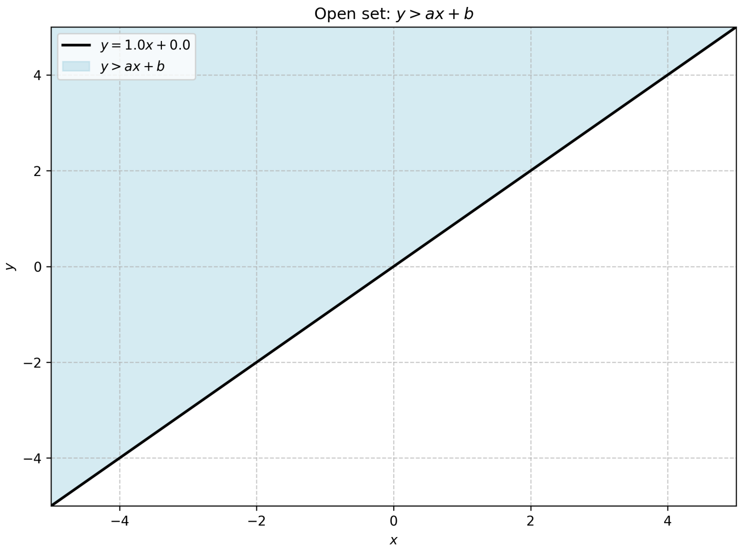
（亦可用 $\varepsilon$-$\delta$ 语言直接证明：对任意 $(x_0,y_0)\in S$，令 $d=y_0-ax_0-b>0$，取 $r=\dfrac{d}{2(1+|a|)}>0$，则当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$ 时，有 $|x-x_0|<r$，$|y-y_0|<r$，从而

$$\begin{aligned} y-ax-b &= (y_0-ax_0-b)+(y-y_0)-a(x-x_0) \\ &\geq d-|y-y_0|-|a|\,|x-x_0| \\ &> d-(1+|a|)r=\frac{d}{2}>0, \end{aligned}$$

故 $(x,y)\in S$，即 $B\big((x_0,y_0),r\big)\subseteq S$，所以 $S$ 是开集。）

在坐标平面上，集合 $S$ 的范围是直线 $y=ax+b$ 的上方（不包括直线本身）的开半平面。作图时，先画出直线 $y=ax+b$（用实线表示），再用阴影或斜线标明直线上方的区域。

边界点应满足的关系为 $y=ax+b$。理由：对于任意满足 $y=ax+b$ 的点，其任意邻域内既包含 $S$ 中的点（例如沿 $y$ 轴正方向扰动），也包含不属于 $S$ 的点（例如沿 $y$ 轴负方向扰动），故这些点是边界点；反之，不在该直线上的点要么是 $S$ 的内点（若 $y>ax+b$），要么存在邻域与 $S$ 不相交（若 $y<ax+b$），故不是边界点。因此 $S$ 的边界恰为直线 $y=ax+b$。




**习题 (9.1.5).** 证明：平面上收敛的点列必然是有界的.

**解答:** 设平面点列 $\{(x_n,y_n)\}$ 收敛于点 $(a,b)$。由收敛定义，对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，使得当 $n>N$ 时，

$$\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}<\varepsilon.$$

特别取 $\varepsilon=1$，则存在 $N$，使得当 $n>N$ 时，

$$\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}<1.$$

此时，利用三角不等式，

$$\begin{aligned} \sqrt{x_n^2+y_n^2} &= \sqrt{(x_n-a+a)^2+(y_n-b+b)^2} \\ &\leqslant \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}+\sqrt{a^2+b^2} \\ &< 1+\sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

因此，对一切 $n > N$，有 $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} < 1 + \sqrt{a^2 + b^2}$。

对于前 $N$ 项 $n = 1, 2, \ldots, N$，由于只有有限个点，可取

$$M_0 = \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

令

$$M = \max\{M_0, 1 + \sqrt{a^2 + b^2}\},$$

则对任意正整数 $n$，均有 $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leqslant M$。故收敛点列 $\{(x_n, y_n)\}$ 有界。