习题 (11.5.9). 计算下列曲线积分.

(1) $\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z, L$ 是顶点为 $A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$ 的三角形边界，从原点看去，L 沿顺时针方向；

(2) $\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z, L$ 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1(a>0,h>0)$ 的交线，从 x 轴正向看来，L 沿逆时针方向；

(3) $\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z, L$ 是平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 与立方体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$ 表面的交线，从 z 轴正向看来，L 沿逆时针方向；

(4) $\oint_L y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z, L$ 是圆柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线，从 z 轴正向看来，L 沿逆时针方向；

(5) $\oint_L (y^2-y)\mathrm{d}x+(z^2-z)\mathrm{d}y+(x^2-x)\mathrm{d}z, L$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，L 的方向与 z 轴正向成右手系；

(6) $\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向。

解答:

(1). 取曲面 S 为三角形 ABC 所围平面区域,法向量取背离原点一侧,即指向平面 $x+y+z=1$ 外侧（法向量 $(1,1,1)$ 方向）。由 Stokes 定理，

$$\oint_L y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中 $\boldsymbol{F}=(y,z,x)$，旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=(-1,-1,-1).$$

三角形 ABC 是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，面积 $A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。单位法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，故

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}=(-1,-1,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=-\sqrt{3},$$

因此

$$\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\sqrt{3}\cdot A=-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}.$$

所以曲线积分为 $-\dfrac{3}{2}$.

(2). 取曲面 S 为平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ 上被圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 截得的部分，法向量取指向 x 轴正向一侧（即法向量为 $\left(\frac{1}{a},0,\frac{1}{h}\right)$ 方向）。$\boldsymbol{F}=(y-z,\,z-x,\,x-y)$，旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=(-2,-2,-2).$$

曲面 S 在 xOy 平面上的投影为圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$，面积 πa^2；法向量方向余弦

$$n_x=\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}},\quad n_z=\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}},\quad n_y=0,$$

曲面面积 $A=\pi a\sqrt{h^2+a^2}$。有向投影

$$\iint_S\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=A\,n_x=\pi ah,\quad\iint_S\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A\,n_z=\pi a^2,\quad\iint_S\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0.$$

因此

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -2\big(\pi a h + 0 + \pi a^2\big) = -2\pi a(a+h).$$

故曲线积分为 $-2\pi a(a+h)$.

(3). 取曲面 S 为平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ 上位于立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant a$ 内部的多边形区域，法向量取上侧（即 z 分量正，对应 $z=\frac{3}{2}a-x-y$ 的上侧）。$\boldsymbol{F}=(y^2-z^2,\, z^2-x^2,\, x^2-y^2)$，旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = (-2(y+z),\, -2(x+z),\, -2(x+y)).$$

曲面方程为 $z=\frac{3}{2}a-x-y$，故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Big(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (1,1,1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

于是

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = [-2(y+z)-2(x+z)-2(x+y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -4(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

代入 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 得被积函数为 $-6a$。投影区域 D 为正方形 $0\leqslant x,y\leqslant a$ 中满足 $\frac{a}{2}\leqslant x+y\leqslant \frac{3}{2}a$ 的部分，其面积

$$A_D = a^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{a}{2}\Big)^2 = \frac{3}{4}a^2.$$

所以

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_D (-6a)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -6a\cdot\frac{3}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3.$$

故曲线积分为 $-\dfrac{9}{2}a^3$.

(4). 取曲面 S 为平面 $y=z$ 上被圆柱 $x^2+y^2=2y$ 截得的椭圆面，法向量取上侧（即 z 分量正，对应 $z=y$ 的上侧）。$\boldsymbol{F}=(y^2,\, xy,\, xz)$，旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = (0,-z,-y).$$

曲面方程 $z=y$，故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Big(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (0,-1,1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

于是

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\cdot 0 + (-z)\cdot(-1) + (-y)\cdot 1 = z-y = 0.$$

因此曲面积分为零，曲线积分也为零。

(5). 取曲面 S 为平面 $x+y+z=0$ 上被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 截得的圆盘，法向量取上侧（即 z 分量正，对应 $z=-x-y$ 的上侧）。$\boldsymbol{F}=(y^2-y,\, z^2-z,\, x^2-x)$，旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = (1-2z,\, 1-2x,\, 1-2y).$$

曲面方程 $z=-x-y$，故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (1,1,1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

于是

$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = [(1-2z)+(1-2x)+(1-2y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = [3-2(x+y+z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

投影区域 D 为椭圆 $2x^2+2y^2+2xy \leqslant a^2$，其面积 $A_D = \dfrac{\pi a^2}{\sqrt{3}}$。所以

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_D 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\cdot\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,\pi a^2.$$

故曲线积分为 $\sqrt{3}\,\pi a^2$.

(6). 取曲面 S 为平面 $x+y+z=2$ 上被柱面 $|x|+|y|=1$ 截得的菱形区域，法向量取上侧（对应 $z=2-x-y$ 的上侧）。$\boldsymbol{F}=(y^2-z^2,\,2z^2-x^2,\,3x^2-y^2)$，旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = (-2(y+2z),\,-2(3x+z),\,-2(x+y)).$$

曲面方程 $z=2-x-y$，故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (1,1,1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

于是

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -2[(y+2z)+(3x+z)+(x+y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2(4x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

代入 $z=2-x-y$ 得 $4x+2y+3(2-x-y)=x-y+6$，所以被积函数为 $-2(x-y+6)$。投影区域 D 为菱形 $|x|+|y|\leqslant 1$，其面积 $A_D=2$。由对称性，$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$，故

$$\iint_D (x-y+6)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 6\cdot 2 = 12,$$

所以

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -2\times 12 = -24.$$

故曲线积分为 -24.

习题 (11.5.10). 在积分 $\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$ 中，路径 L 是 Oxy 平面上正向的圆 $x^2+y^2=R^2, z=0$；利用 Stokes 公式化曲线积分为以 L 为边界所围区域 S 上的曲面积分。(1) S 取 Oxy 平面上的圆面 $x^2+y^2\leqslant R^2$；(2) S 取半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$。结果相同吗?

解答: 向量场 $\boldsymbol{F}=(x^2y^3,\ 1,\ z)$，其旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial 1}{\partial z},\ \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial 1}{\partial x}-\frac{\partial(x^2y^3)}{\partial y}\right) = (0,\ 0,\ -3x^2y^2).$$

曲线 L 是 Oxy 平面上的正向圆 $x^2+y^2=R^2,\ z=0$（逆时针方向）。由 Stokes 公式，

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中曲面 S 以 L 为边界，定向与 L 一致（法向量向上）。

(1). S 取 Oxy 平面上的圆面 $x^2+y^2\leqslant R^2,\ z=0$。
取法向量向上 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(0,0,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

$$\begin{aligned}\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}(0,0,-3x^2y^2)\cdot(0,0,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-3\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

化为极坐标：$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。

$$x^2y^2=r^4\cos^2\theta\sin^2\theta=\frac{r^4}{4}\sin^2(2\theta),$$

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r^4}{4}\sin^2(2\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta)\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R r^5\,\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^6}{6}=\frac{\pi R^6}{96}.\end{aligned}$$

因此

$$\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-3\cdot\frac{\pi R^6}{96}=-\frac{\pi R^6}{32}.$$

(2). S 取半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$。
曲面方程 $z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，投影区域 $D:\ x^2+y^2\leqslant R^2$。取法向量向上，其向量面元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(-f_x,-f_y,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

代入旋度：

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(0,0,-3x^2y^2)\cdot\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

故

$$\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-3\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

与 (1) 中的二重积分完全相同。
现在重新计算该二重积分：

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R r^5\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^6}{6}=\frac{\pi R^6}{24}.\end{aligned}$$

从而

$$-3\cdot\frac{\pi R^6}{24}=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

因此两个曲面积分的结果均为 $-\dfrac{\pi R^6}{8}$，即结果相同。

习题 (11.5.12). 向量场 $v=(y^2+z^2)i+(z^2+x^2)j+(x^2+y^2)k$ 沿曲线 L 的环量. L 为 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$ 与 $x^2+y^2=Rx$ 的交线, 从 x 轴正向看来, L 沿逆时针方向.

解答: 使用 Stokes 定理，将环量 $\oint_L \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ 转化为曲面积分。选取曲面 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\geqslant 0)$ 上满足 $x^2+y^2\leqslant Rx$ 的部分，其边界即为曲线 L。取 S 的定向为球面的外法向，该定向与曲线 L 的给定方向（从 x 轴正向看逆时针）满足右手定则。

计算旋度：

$$\nabla\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}=2\,(y-z,\ z-x,\ x-y).$$

球面外法向 $\mathbf{n}=\dfrac{(x,y,z)}{R}$，于是

$$(\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}=\frac{2}{R}\big[x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\big]=0.$$

因此曲面积分 $\displaystyle\iint_S(\nabla\times\mathbf{v})\cdot d\mathbf{S}=0$，由 Stokes 定理即得环量为零。

习题 (11.7.2). 求下列曲线积分.

(1) $\int_L(2x+y)\mathrm{d}x+(x+4y+2z)\mathrm{d}y+(2y-6z)\mathrm{d}z$，其中 L 由点 $P_1(a,0,0)$ 沿曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=0\end{cases}$ 到点 $P_2(0,a,0)$，再由 P_2 沿直线 $\begin{cases}z+y=a,\\ x=0\end{cases}$ 到点 $P_3(0,0,a)$；

(2) $\int_{\overrightarrow{AMB}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$，其中 $\overrightarrow{AMB}$ 是柱面螺线 $x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ 上点 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 这一段。

解答:

(1). 曲线 L 由两段组成：第一段是从 $P_1(a,0,0)$ 沿圆弧

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=0\end{cases}$$

到 $P_2(0,a,0)$；第二段是从 P_2 沿直线

$$\begin{cases}z+y=a,\\ x=0\end{cases}$$

到 $P_3(0,0,a)$。

第一段：参数化 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=0,\ t:0\to\frac{\pi}{2}$，则

$$dx=-a\sin t\,dt,\qquad dy=a\cos t\,dt,$$

被积表达式化为 $(2x+y)dx+(x+4y)dy$。代入得

$$\int_0^{\pi/2}\big[(2a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t+4a\sin t)(a\cos t)\big]dt=a^2.$$

第二段：参数化 $x=0,\ y=a-t,\ z=t,\ t:0\to a$，则

$$dx=0,\qquad dy=-dt,\qquad dz=dt.$$

被积表达式化为

$$\begin{aligned}&\big(0+4(a-t)+2t\big)(-dt)+\big(2(a-t)-6t\big)dt\\ &=\big[-(4a-2t)+(2a-8t)\big]dt=(-2a-6t)dt.\end{aligned}$$

积分得

$$\int_0^a(-2a-6t)dt=\big[-2at-3t^2\big]_0^a=-2a^2-3a^2=-5a^2.$$

故第一段与第二段之和为

$$a^2+(-5a^2)=-4a^2.$$

(2). 曲线 $\overrightarrow{AMB}$ 为柱面螺线

$$x=a\cos\varphi,\qquad y=a\sin\varphi,\qquad z=\frac{h}{2\pi}\varphi,$$

参数 φ 从 0 到 2π。则

$$dx=-a\sin\varphi\,d\varphi,\qquad dy=a\cos\varphi\,d\varphi,\qquad dz=\frac{h}{2\pi}\,d\varphi.$$

令 $k=\dfrac{h}{2\pi}$，被积表达式

$$(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$$

代入并化简得

$$\begin{aligned}\Big[&-a^3\sin\varphi\cos^2\varphi+a^2k\varphi\sin^2\varphi+a^3\sin^2\varphi\cos\varphi\\ &-a^2k\varphi\cos^2\varphi+k^3\varphi^2-a^2k\sin\varphi\cos\varphi\Big]d\varphi.\end{aligned}$$

逐项积分：

- $a^3\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi-\cos\varphi)$ 的原函数为 $\dfrac{a^3}{3}(\sin^3\varphi-\cos^3\varphi)$，在 $[0,2\pi]$ 上积分为零；
- $-a^2k\varphi\cos 2\varphi$ 的原函数为 $-a^2k\Big(\dfrac{1}{2}\varphi\sin 2\varphi+\dfrac{1}{4}\cos 2\varphi\Big)$，在 $[0,2\pi]$ 上为零；
- $-\dfrac{a^2k}{2}\sin 2\varphi$ 的积分为零；
- $k^3\varphi^2$ 的积分得 $k^3\cdot\dfrac{(2\pi)^3}{3}=\dfrac{8\pi^3}{3}k^3$，代入 $k=\dfrac{h}{2\pi}$ 得 $\dfrac{h^3}{3}$.

故曲线积分值为 $\dfrac{h^3}{3}$.

习题 (11.7.6). 验证下列积分与路径无关，并求出它们的值.

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$;

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,3)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(5) $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)}\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$;

解答: 验证每个微分形式是否为恰当形式（即场是保守的），若是则求势函数，再用起点与终点的势函数差求值。

(1). 积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$ 可化为

$$(x-y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y.$$

令

$$P=x-y,\qquad Q=-(x-y)=-x+y.$$

计算偏导数：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1,$$

两者相等，故积分与路径无关。
求势函数 $F(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x-y,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-x+y.$$

对 x 积分得

$$F=\int(x-y)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-xy+g(y).$$

对 y 求偏导：

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-x+g'(y)\overset{!}{=}-x+y,$$

所以 $g'(y)=y$，从而 $g(y)=\dfrac{y^2}{2}+C$。取 $C=0$，得

$$F(x,y)=\frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}(x-y)^2.$$

因此

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=F(1,1)-F(0,0)=\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

(2). 积分 $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(6,3)}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 中令

$$P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

计算偏导数：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

两者相等，故积分与路径无关。
求势函数 $F(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

对 x 积分（令 $u=x^2+y^2$，$\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$）：

$$F=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}=\sqrt{x^2+y^2}+g(y).$$

对 y 求偏导：

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+g'(y)\overset{!}{=}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

得 $g'(y)=0$，故 $g(y)$ 为常数。取常数为 0，则

$$F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

因此

$$\int_{(1,0)}^{(6,3)}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=F(6,3)-F(1,0)=\sqrt{6^2+3^2}-\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{45}-1=3\sqrt{5}-1.$$

(3). 积分

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)}\Big(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\Big)\mathrm{d}x+\Big(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\Big)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

令

$$P=1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\qquad Q=\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},\qquad R=-\frac{xy}{z^2}.$$

验证恰当性条件：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z},\qquad\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{z}+\frac{1}{y^2},\quad\text{相等;}$$
$$\frac{\partial P}{\partial z}=-\frac{y}{z^2},\qquad\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{y}{z^2},\quad\text{相等;}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{x}{z^2},\qquad\frac{\partial R}{\partial y}=-\frac{x}{z^2},\quad\text{相等.}$$

故积分与路径无关。
求势函数 $F(x,y,z)$ 满足

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}.$$

对 x 积分：

$$F=\int\Big(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\Big)\mathrm{d}x=x\Big(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\Big)+g(y,z)=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+g(y,z).$$

对 y 求偏导：

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{x}{y^2}+\frac{x}{z}+\frac{\partial g}{\partial y}\overset{!}{=}\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},$$

得 $\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$，故 g 仅与 z 有关，记 $g=h(z)$。对 z 求偏导：

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2}+h'(z)\overset{!}{=}-\frac{xy}{z^2},$$

得 $h'(z)=0$，故 h 为常数。取常数为 0，则

$$F(x,y,z)=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}.$$

因此

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)}\cdots=F(2,2,2)-F(1,1,1)=\left(2-\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 2}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 1}{1}\right)=(2-1+2)-(1-1+1)=3-1=2.$$

习题 (11.7.7). 设 $f(u)$ 是连续函数，但不一定可微，L 是分段光滑的任意闭曲线，证明：

(1) $\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$;

(2) $\oint_L f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=0$.

解答:

(1). 令 $u=x^2+y^2$, 则 $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y$, 从而

$$x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u.$$

于是被积表达式化为

$$f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}\,f(u)\,\mathrm{d}u.$$

因 f 连续, 定义

$$F(u)=\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则 $F'(u)=f(u)$, 故 $\mathrm{d}F(u)=f(u)\,\mathrm{d}u$. 因此

$$\frac{1}{2}\,f(u)\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}F(u)\right)$$

是恰当微分. 沿分段光滑闭曲线 L 的积分为零:

$$\oint_L f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=0.$$

(2). 令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $r^2=x^2+y^2+z^2$, 微分得

$$2r\,\mathrm{d}r=2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+2z\,\mathrm{d}z,$$

即

$$x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z=r\,\mathrm{d}r.$$

被积表达式化为

$$f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)=r\,f(r)\,\mathrm{d}r.$$

因 f 连续, 定义

$$G(r)=\int_0^r t\,f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则 $G'(r)=r\,f(r)$, 故 $\mathrm{d}G(r)=r\,f(r)\,\mathrm{d}r$. 因此 $r\,f(r)\,\mathrm{d}r$ 是恰当微分, 沿分段光滑闭曲线 L 的积分为零:

$$\oint_L f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)=0.$$

习题 (11.7.9). 试求函数 $f(x)$，使曲线积分 $\int_L [f'(x)+6f(x)+\mathrm{e}^{-2x}]\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 与积分的路径无关.

解答: 由曲线积分与路径无关的条件，可得函数 $f(x)$ 满足的微分方程：

$$f''(x)+6f'(x)+6f(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}.$$

解此二阶线性常系数非齐次方程。齐次方程的特征方程为

$$r^2+6r+6=0,$$

解得

$$r=-3\pm\sqrt{3}.$$

故齐次通解为

$$f_h(x)=C_1\mathrm{e}^{(-3-\sqrt{3})x}+C_2\mathrm{e}^{(-3+\sqrt{3})x}.$$

设特解形式为 $f_p(x)=A\mathrm{e}^{-2x}$，代入原方程：

$$\begin{aligned}4A\mathrm{e}^{-2x}+6(-2A\mathrm{e}^{-2x})+6A\mathrm{e}^{-2x}&=(4-12+6)A\mathrm{e}^{-2x}\\&=-2A\mathrm{e}^{-2x}=-2\mathrm{e}^{-2x},\end{aligned}$$

得 $A=1$，故特解为 e^{-2x}。因此原方程的通解为

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{(-3-\sqrt{3})x}+C_2\mathrm{e}^{(-3+\sqrt{3})x}+\mathrm{e}^{-2x},$$

其中 C_1,C_2 为任意常数。此即所求函数。

习题 (11.7.10). 已知 $\alpha(0)=0,\alpha'(0)=2,\beta(0)=2$.

(1) 求 $\alpha(x),\beta(x)$ 使曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路线无关，其中 $P(x,y)=[2x\alpha'(x)+\beta(x)]y^2-2y\beta(x)\tan 2x$, $Q(x,y)=[\alpha'(x)+4x\alpha(x)]y+\beta(x)$;

(2) 求 $\int_{(0,0)}^{(0,2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

解答:

(1). 由曲线积分与路径无关的条件，有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$。计算得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\big(4x\alpha'(x)+2\beta(x)\big)y-2\beta(x)\tan 2x,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\big(\alpha''(x)+4\alpha(x)+4x\alpha'(x)\big)y+\beta'(x).$$

比较 y 的系数及常数项，得到方程组

$$\begin{cases}4x\alpha'(x)+2\beta(x)=\alpha''(x)+4\alpha(x)+4x\alpha'(x),\\ -2\beta(x)\tan 2x=\beta'(x).\end{cases}$$

化简第一式得 $2\beta(x)=\alpha''(x)+4\alpha(x)$；第二式为 $\beta'(x)=-2\beta(x)\tan 2x$。

解 $\beta'(x)=-2\beta(x)\tan 2x$，分离变量积分得 $\beta(x)=C\cos 2x$，由 $\beta(0)=2$ 得 $C=2$，故

$$\beta(x)=2\cos 2x.$$

代入第一式得 $\alpha''(x)+4\alpha(x)=4\cos 2x$。齐次方程通解为 $\alpha_h(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$，非齐次项 $4\cos 2x$ 对应的特解设为 $\alpha_p(x)=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$，代入确定系数得 $A=0,\ B=1$，即 $\alpha_p(x)=x\sin 2x$。故通解为

$$\alpha(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\sin 2x.$$

由初始条件 $\alpha(0)=0,\ \alpha'(0)=2$ 得 $C_1=0,\ C_2=1$，所以

$$\alpha(x)=(1+x)\sin 2x.$$

(2). 曲线积分与路径无关，取路径沿 y 轴从 $(0,0)$ 到 $(0,2)$，此时 $x=0,\ dx=0$，则

$$\int_{(0,0)}^{(0,2)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_0^2 Q(0,y)\,\mathrm{d}y.$$

计算 $Q(0,y)=\big[\alpha'(0)+4\cdot 0\cdot\alpha(0)\big]y+\beta(0)=2y+2$，故

$$\int_0^2(2y+2)\,\mathrm{d}y=\big[y^2+2y\big]_0^2=8.$$

因此，(1) $\alpha(x)=(1+x)\sin 2x,\ \beta(x)=2\cos 2x$；(2) 所求积分值为 8.

习题 (11.7.11). 设函数 $Q(x,y)$ 在 Oxy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

解答: 由于曲线积分与路径无关，则有

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

计算得

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x,$$

故

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x.$$

对 x 积分得

$$Q(x,y)=x^2+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 为待定函数。

现利用第二个条件：对任意 t，

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

由于积分与路径无关，可设势函数 $F(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}F = 2xy\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$。由 $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy$ 得

$$F(x,y) = x^2y + g(y).$$

结合 $Q = \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2 + g'(y)$ 与 $Q = x^2 + \varphi(y)$ 得 $g'(y) = \varphi(y)$，故

$$F(x,y) = x^2y + \int \varphi(y)\,\mathrm{d}y + C.$$

于是两个积分值分别为

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} = F(t,1) - F(0,0) = t^2 \cdot 1 + \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y = t^2 + \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} = F(1,t) - F(0,0) = 1^2 \cdot t + \int_0^t \varphi(y)\,\mathrm{d}y = t + \int_0^t \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

上述两式相等给出

$$t^2 + \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y = t + \int_0^t \varphi(y)\,\mathrm{d}y \qquad (\forall t).$$

令 $t = 0$ 得 $\displaystyle\int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0$，因此上式化为

$$t^2 = t + \int_0^t \varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

即

$$\int_0^t \varphi(y)\,\mathrm{d}y = t^2 - t.$$

两边对 t 求导得

$$\varphi(t) = 2t - 1.$$

故

$$Q(x,y) = x^2 + (2y-1) = x^2 + 2y - 1.$$

此函数满足一阶连续偏导数条件，且验证原条件成立。

习题 (11.7.13). 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0) = 0$，$f'(0) = 2$，且 $[\mathrm{e}^x \sin y + x^2y + f(x)y]\mathrm{d}x + [f'(x) + \mathrm{e}^x \cos y + 2x]\mathrm{d}y = 0$ 为一全微分方程. 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

解答: 由全微分条件 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$，其中

$$M = \mathrm{e}^x \sin y + x^2y + f(x)y, \qquad N = f'(x) + \mathrm{e}^x \cos y + 2x.$$

计算偏导数：

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \mathrm{e}^x \cos y + x^2 + f(x), \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = f''(x) + \mathrm{e}^x \cos y + 2.$$

令两者相等：

$$e^x\cos y + x^2 + f(x) = f''(x) + e^x\cos y + 2,$$

化简得

$$f''(x) - f(x) = x^2 - 2.$$

此为二阶线性常系数非齐次微分方程。齐次方程 $f'' - f = 0$ 的通解为 $C_1e^x + C_2e^{-x}$。设非齐次特解为 $f_p = Ax^2 + Bx + C$，代入方程：

$$2A - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 2,$$

即

$$-Ax^2 - Bx + (2A - C) = x^2 - 2.$$

比较系数得

$$-A = 1, \qquad -B = 0, \qquad 2A - C = -2,$$

解得 $A = -1,\ B = 0,\ C = 0$，故特解 $f_p = -x^2$。因此

$$f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2.$$

利用初始条件 $f(0) = 0,\ f'(0) = 2$：

$$f(0) = C_1 + C_2 = 0, \qquad f'(x) = C_1e^x - C_2e^{-x} - 2x, \qquad f'(0) = C_1 - C_2 = 2,$$

解得 $C_1 = 1,\ C_2 = -1$。所以

$$f(x) = e^x - e^{-x} - x^2.$$

将 $f(x)$ 代入原方程，注意到 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2x$，故

$$M = e^x\sin y + (e^x - e^{-x})y, \qquad N = e^x\cos y + e^x + e^{-x}.$$

求势函数 $U(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}U = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$。由 M 积分：

$$\begin{aligned} U = \int M\,\mathrm{d}x &= \int \left[e^x\sin y + (e^x - e^{-x})y\right]\mathrm{d}x \\ &= e^x\sin y + y(e^x + e^{-x}) + \varphi(y). \end{aligned}$$

对 y 求偏导：

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x\cos y + e^x + e^{-x} + \varphi'(y).$$

令其等于 N：

$$e^x\cos y + e^x + e^{-x} + \varphi'(y) = e^x\cos y + e^x + e^{-x},$$

得 $\varphi'(y) = 0$，取 $\varphi(y) = 0$。因此

$$U(x,y) = e^x\sin y + ye^x + ye^{-x}.$$

故原全微分方程的通解为

$$e^x\sin y + y(e^x + e^{-x}) = C,$$

其中 C 为任意常数。

习题 (11.7.14). 确定常数 λ, 使在右半平面 $x>0$ 上的向量场 $v=2xy(x^4+y^2)^\lambda i-x^2(x^4+y^2)^\lambda j$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度, 并求 $u(x,y)$.

解答: 向量场 $v=P\,\boldsymbol{i}+Q\,\boldsymbol{j}$, 其中

$$P=2xy(x^4+y^2)^\lambda,\qquad Q=-x^2(x^4+y^2)^\lambda.$$

v 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度的必要条件是旋度为零, 即

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

计算偏导数:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x\,\frac{\partial}{\partial y}\big[y(x^4+y^2)^\lambda\big]=2x\big[(x^4+y^2)^\lambda+y\cdot\lambda(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y\big]=2x(x^4+y^2)^{\lambda-1}\big[x^4+(2\lambda+1)y^2\big],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\big[x^2(x^4+y^2)^\lambda\big]=-\big[2x(x^4+y^2)^\lambda+x^2\cdot\lambda(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3\big]=-2x(x^4+y^2)^{\lambda-1}\big[(2\lambda+1)x^4+y^2\big].$$

令两者相等:

$$2x(x^4+y^2)^{\lambda-1}\big[x^4+(2\lambda+1)y^2\big]=-2x(x^4+y^2)^{\lambda-1}\big[(2\lambda+1)x^4+y^2\big].$$

由于 $x>0$, 公因子 $2x(x^4+y^2)^{\lambda-1}\neq 0$, 约去后得

$$x^4+(2\lambda+1)y^2=-(2\lambda+1)x^4-y^2.$$

移项整理:

$$x^4+(2\lambda+1)y^2+(2\lambda+1)x^4+y^2=0\implies(2\lambda+2)x^4+(2\lambda+2)y^2=0\implies 2(\lambda+1)(x^4+y^2)=0.$$

因为 $x>0$ 时 $x^4+y^2>0$, 故 $\lambda+1=0$, 即

$$\boxed{\lambda=-1}.$$

此时 $P=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}$, $Q=-\dfrac{x^2}{x^4+y^2}$. 求 $u(x,y)$ 满足 $\nabla u=(P,Q)$. 先对 y 积分 Q:

$$u(x,y)=\int Q\,\mathrm{d}y+\psi(x)=-\int\frac{x^2}{x^4+y^2}\,\mathrm{d}y+\psi(x)=-\arctan\frac{y}{x^2}+\psi(x).$$

再对 x 求偏导:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{1+(y/x^2)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x^2}\Big)+\psi'(x)=-\frac{x^4}{x^4+y^2}\cdot\Big(-\frac{2y}{x^3}\Big)+\psi'(x)=\frac{2xy}{x^4+y^2}+\psi'(x).$$

令其等于 $P=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}$, 得 $\psi'(x)=0$, 故 $\psi(x)=C$ (常数). 因此

$$u(x,y)=-\arctan\frac{y}{x^2}+C,$$

其中 C 为任意常数 (通常取 $C=0$). 该表达式在 $x>0$ 上连续可微, 确为所求势函数.