习题 (11.3.6). 计算曲线积分 $\int_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$. (1) L 为从点 $A(-a,0)$ 沿圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 到点 $B(a,0), a>0$; (2) L 为从点 $A(-1,0)$ 沿抛物线 $y=4-(x-1)^2$ 到点 $B(3,0)$.

解答: 被积表达式为

$$\omega=\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

在极坐标下，令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，则

$$-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=r^2\,\mathrm{d}\theta,\qquad x^2+y^2=r^2,$$

于是 $\omega=\mathrm{d}\theta$。因此曲线积分 $\int_L\omega$ 等于沿曲线 L 从起点到终点幅角的连续变化量，即

$$\int_L\omega=\theta(B)-\theta(A),$$

其中 θ 取沿路径连续变化的一个分支。

(1). L 为从 $A(-a,0)$ 沿圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 到 $B(a,0)$，$a>0$。
该圆周是圆心在原点、半径为 a 的上半圆。起点 A 在负 x 轴上，可取幅角 $\theta(A)=\pi$；终点 B 在正 x 轴上，可取幅角 $\theta(B)=0$（或 2π）。沿上半圆，幅角从 π 连续递减到 0，变化量为

$$\Delta\theta=0-\pi=-\pi.$$

所以

$$\int_L\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-\pi.$$

(2). L 为从 $A(-1,0)$ 沿抛物线 $y=4-(x-1)^2$ 到 $B(3,0)$。
该抛物线开口向下，顶点为 $(1,4)$，且当 $x=-1$ 和 $x=3$ 时 $y=0$，曲线上其余点满足 $y>0$（在上半平面）。起点 $A(-1,0)$ 在负 x 轴上，幅角 $\theta(A)=\pi$；终点 $B(3,0)$ 在正 x 轴上，幅角 $\theta(B)=0$。沿抛物线，幅角从 π 连续减小，经过 $\pi/2$（当 $x=0$ 时）直至 0，净变化

$$\Delta\theta=0-\pi=-\pi.$$

因此

$$\int_L\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-\pi.$$

答案

$$(1)\ -\pi,\qquad (2)\ -\pi.$$

习题 (11.3.7). 设 D 是平面上由简单闭曲线 L 围成的区域。
(1) 如果 $f(x,y)$ 有连续的二阶导数，证明：

$$\oint_L\frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}s=\iint_D\Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

并说明当 $\Delta f=0$ 时左端为零；
(2) 如果 $\boldsymbol{a}$ 是单位常值向量，证明：

$$\oint_L\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s=0;$$

(3) 如果 $u(x,y), v(x,y)$ 有连续的二阶导数，证明第二 Green 公式：

$$\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解答: (1) 取向量场 $\boldsymbol{F} = \nabla f$。由平面上的散度定理，

$$\oint_L \nabla f \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \mathrm{div}(\nabla f)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

注意到 $\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \dfrac{\partial f}{\partial n}$，且 $\mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f$，即得

$$\oint_L \frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

若 $\Delta f = 0$，则右端为零，故左端也为零。

(2) 因 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 均为单位向量，$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$。对常向量场 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{a}$ 应用散度定理，并利用 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 0$，有

$$\oint_L \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = \oint_L \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

(3) 取向量场 $\boldsymbol{G} = v\nabla u - u\nabla v$。则

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{G} = \nabla v\cdot\nabla u + v\Delta u - \nabla u\cdot\nabla v - u\Delta v = v\Delta u - u\Delta v.$$

又有

$$\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n} = v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}.$$

由散度定理即得

$$\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

习题 (11.4.1). 计算下列第二型曲面积分.

(1) $\iint_S (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧；

(3) $\iint_S xy^2z^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的 $x\leqslant 0$ 的一半，远离球心的一侧；

(5) $\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分，远离原点的一侧；

(7) $\iint_S xz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧；

解答:

(1). 设向量场 $\boldsymbol{F} = (0,0,x+y^2+z)$，则 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = 1$。由高斯散度定理，

$$\iint_S (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V 1\,\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi abc,$$

其中 V 为椭球体。

(3). 曲面 S 为 $x=-\sqrt{R^2-y^2-z^2}$（$y^2+z^2\le R^2$），取远离球心一侧，即法向指向 x 负方向，故 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。于是

$$\begin{aligned}\iint_S xy^2z^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_{y^2+z^2\le R^2}\left(-\sqrt{R^2-y^2-z^2}\right)y^2z^2\cdot(-1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \iint_{y^2+z^2\le R^2}\sqrt{R^2-y^2-z^2}\,y^2z^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

令 $y=r\cos\theta,\ z=r\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos4\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

$\int_0^{2\pi}(1-\cos4\theta)\,\mathrm{d}\theta=2\pi$，$\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{8}{105}R^7$，故原式 $=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{8}{105}R^7=\frac{2\pi}{105}R^7$。

(5). 平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分，远离原点一侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 方向，故三个投影均为正。将曲面分别投影到坐标平面：

$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{y+z\le1,\ y,z\ge0}(1-y-z)^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

同理另两项相同。计算

$$\iint_{x+y\le1,\ x,y\ge0}(1-x-y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{12}.$$

故原式 $=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$。

(7). 补上底面 $S_0: z=0,\ x^2+y^2\le a^2$，取下侧，与上半球面上侧构成封闭曲面外侧。向量场 $\boldsymbol{F}=(xz^2,\ x^2y,\ y^2z)$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=x^2+y^2+z^2$。由高斯定理，

$$\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{S_0}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V,$$

V 为上半球体。球坐标下，

$$\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^4\,\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{5}a^5.$$

在底面 S_0 上，$z=0$，$\boldsymbol{F}=(0,x^2y,0)$，法向量向下，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(0,0,-1)\mathrm{d}S$，故 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$。因此上半球面的积分为 $\frac{2\pi}{5}a^5$。

习题 (11.4.2). 求场 $\boldsymbol{v}=(x^3-yz)\boldsymbol{i}-2x^2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 通过长方体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 的外侧表面 S 的通量.

解答: 根据散度定理，向量场

$$\boldsymbol{v}=(x^3-yz)\boldsymbol{i}-2x^2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

通过长方体

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c$$

外侧表面 S 的通量等于其散度在长方体上的三重积分。

计算散度：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-2x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3x^2 - 2x^2 + 1 = x^2 + 1.$$

因此通量

$$\Phi = \iiint\limits_V (x^2 + 1)\, \mathrm{d}V,$$

其中 $V = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$。积分化为累次积分：

$$\Phi = \int_0^c \int_0^b \int_0^a (x^2 + 1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

由于被积函数仅依赖于 x，可分离变量：

$$\Phi = \left(\int_0^a (x^2 + 1)\, \mathrm{d}x \right) \left(\int_0^b \mathrm{d}y \right) \left(\int_0^c \mathrm{d}z \right).$$

计算各积分：

$$\int_0^a (x^2 + 1)\, \mathrm{d}x = \int_0^a x^2\, \mathrm{d}x + \int_0^a 1\, \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3} + a,$$

$$\int_0^b \mathrm{d}y = b, \qquad \int_0^c \mathrm{d}z = c.$$

故

$$\Phi = \left(\frac{a^3}{3} + a \right) bc = abc \left(\frac{a^2}{3} + 1 \right) = \frac{abc(a^2 + 3)}{3}.$$

因此，所求通量为 $\dfrac{abc(a^2 + 3)}{3}$。

习题 (11.5.1). 计算下列曲面积分。

(1) $\iint_S (x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (xy+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, S$ 是以 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 为顶点的四面体的外侧表面；

(3) $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, S$ 是球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 的外侧；

(5) $\iint_S (x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, S$ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的下侧；

解答:

(1). 曲面 S 是四面体 $OABC$ 的外侧表面，顶点为 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. 被积表达式为 $(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (xy+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 应用散度定理，设向量场 $\boldsymbol{F} = (x+1,\, y,\, xy+z)$，则

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial(x+1)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial(xy+z)}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

曲面积分等于三重积分 $\iiint_V 3\,\mathrm{d}V = 3V$, 其中 V 是四面体的体积. 四面体的体积为 $\frac{1}{6}$，故

$$\iint_S (x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (xy+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

(2). 曲面 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ 的外侧. 被积表达式为 $x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 设 $\boldsymbol{F} = (x^2,\, y^2,\, z^2)$，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} = 2x+2y+2z = 2(x+y+z).$$

由散度定理，曲面积分等于 $\iiint_V 2(x+y+z)\,\mathrm{d}V$, 其中 V 是球体. 作平移变换 $u = x-a$, $v = y-b$, $w = z-c$，则积分区域变为 $u^2+v^2+w^2 \leqslant R^2$，且

$$\iiint_V 2(x+y+z)\,\mathrm{d}V = 2\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant R^2}(u+v+w+a+b+c)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

由于 u, v, w 在对称区域上的积分为零，而球体体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3$，因此

$$\iiint_V 2(x+y+z)\,\mathrm{d}V = 2(a+b+c)\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c).$$

(3). 曲面 S 是旋转抛物面 $z = x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧. 被积表达式为 $(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 设 $\boldsymbol{F} = (x-z,\, y-x,\, z-y)$，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial(x-z)}{\partial x} + \frac{\partial(y-x)}{\partial y} + \frac{\partial(z-y)}{\partial z} = 1+1+1 = 3.$$

曲面 S 不是封闭的，补上平面圆盘 $S_1:\ z=1,\ x^2+y^2\leqslant 1$，取上侧. 这样 S（下侧）与 S_1（上侧）共同构成封闭曲面的外侧，记所围区域为 V（抛物面与平面 $z=1$ 之间的区域）. 由散度定理，

$$\iint_{S\cup S_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V 3\,\mathrm{d}V = 3V.$$

区域 V 的体积为

$$V = \iiint_V \mathrm{d}V = \int_0^1 \iint_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \pi z\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2},$$

故 $\displaystyle\iint_{S\cup S_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{3\pi}{2}.$

再计算 S_1 上的积分（上侧）. 在平面 $z=1$ 上，$(\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,\, \mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0)$，只有 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 项贡献，且 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (0,0,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，因此

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_1}(z-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(1-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

圆盘面积为 π，而 y 的积分为零（对称性），故

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pi.$$

因此原曲面积分为

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

习题 (11.5.3). 设区域 V 是由曲面 $x^2+y^2-\frac{z^2}{2}=1$ 及平面 $z=1, z=-1$ 围成，S 为 V 的全表面外侧，又设 $\mathbf{V}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$. 求积分 $\iint_S \frac{\mathrm{xdydz+ydzdx+zdxdy}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$.

解答: 所求积分为向量场 $\mathbf{V}=\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ 通过曲面 S 的外侧通量，即 $\displaystyle\iint_S \mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}$，其中 $d\mathbf{S}=(dy\,dz,\ dz\,dx,\ dx\,dy)$。

1. 散度计算在 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$ 处，计算散度：

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)=0.$$

故 $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$ 对所有 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 成立。

2. 奇点处理区域 V 由曲面 $x^2+y^2-\dfrac{z^2}{2}=1$ 及平面 $z=1,\ z=-1$ 围成，其内部包含原点 $(0,0,0)$。在原点处向量场有奇点，不能直接应用高斯公式。取充分小的 $\varepsilon>0$（例如 $\varepsilon<1$），使得小球 $B_\varepsilon=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq\varepsilon^2\}$ 完全包含在 V 内。令 $V_\varepsilon=V\setminus B_\varepsilon$，其边界由原曲面 S（外侧）和球面 S_ε（半径为 ε）组成。对于 V_ε，取外侧方向：在 S 上仍为原外侧；在 S_ε 上，外侧指向 V_ε 外部，即指向球心（原点）。

3. 应用高斯公式在区域 V_ε 上，$\mathbf{V}$ 连续可微且散度为零，故

$$\iint_{\partial V_\varepsilon}\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_{V_\varepsilon}\nabla\cdot\mathbf{V}\,dV=0.$$

而 $\partial V_\varepsilon=S\cup S_\varepsilon$，且方向如上所述，因此

$$\iint_S\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}+\iint_{S_\varepsilon}\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=0.$$

4. 计算球面上的通量在球面 S_ε 上，单位外法向（指向球心）为 $\mathbf{n}=-\dfrac{(x,y,z)}{r}$，即 $-\hat{\mathbf{r}}$。而 $\mathbf{V}=\dfrac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$，故

$$\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=\mathbf{V}\cdot(\mathbf{n}\,dS)=\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot(-\hat{\mathbf{r}})\,dS=-\frac{1}{\varepsilon^2}\,dS.$$

球面面积 $\displaystyle\iint_{S_\varepsilon}dS=4\pi\varepsilon^2$，因此

$$\iint_{S_\varepsilon}\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=-\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2=-4\pi.$$

5. 得出原积分由步骤 3 的等式得

$$\iint_S\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=4\pi.$$

故所求积分的值为 4π。

习题 (11.5.7). 设 $\boldsymbol{c}$ 是常向量，S 是任意的光滑闭曲面，证明：

$$\iint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}}$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$ 与曲面单位外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角。

解答: 夹角有定义时 $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$。由于 $\boldsymbol{n}$ 为单位外法向量，

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}}) = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{c}|}.$$

设 V 为闭曲面 S 所围成的区域。由高斯公式，并注意常向量场 $\boldsymbol{c}$ 的散度为零，有

$$\begin{aligned}\iint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S &= \frac{1}{|\boldsymbol{c}|}\iint_S \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{c}|}\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}V = 0.\end{aligned}$$