

习题 (11.2.2). 计算下列曲面积分.

(1)  $\iint_S (x+y+z) dS$ ,  $S$ : 立方体  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  的全表面;

(3)  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ ,  $S$ : 由  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $z = 1$  所围成的立体表面;

(5)  $\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - x^2 z^2 + 1) dS$ ,  $S$ : 锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  所截下的部分;

(7)  $\iint_S |xyz| dS$ ,  $S$ : 曲面  $z = x^2 + y^2$  介于平面  $z = 0$  和  $z = 1$  之间的部分.

解答: 计算下列曲面积分.

(1) 立方体全表面由六个面组成, 分别计算每个面上的积分:

- 面  $x = 0$ :  $\iint_{x=0} (y+z) dS = \int_0^1 \int_0^1 (y+z) dy dz = 1$  - 面  $x = 1$ :  $\iint_{x=1} (1+y+z) dS = \int_0^1 \int_0^1 (1+y+z) dy dz = 2$  - 面  $y = 0$ :  $\iint_{y=0} (x+z) dS = 1$  - 面  $y = 1$ :  $\iint_{y=1} (x+1+z) dS = 2$  - 面  $z = 0$ :  $\iint_{z=0} (x+y) dS = 1$  - 面  $z = 1$ :  $\iint_{z=1} (x+y+1) dS = 2$

总和为  $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 9$ .

(3) 曲面由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和平面  $z = 1$  组成. 锥面部分:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 投影区域  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $dS = \sqrt{2} dA$ , 被积函数  $x^2 + y^2$ , 积分化为

$$\iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2} dA = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

平面部分:  $z = 1$ , 投影区域相同,  $dS = dA$ , 积分

$$\iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}.$$

总和为  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$ .

(5) 锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  所截部分, 投影区域  $D: (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ . 锥面  $dS = \sqrt{2} dA$ . 被积函数代入  $z^2 = x^2 + y^2$  化简:

$$x^4 - y^4 + y^2 z^2 - x^2 z^2 + 1 = x^4 - y^4 + y^2(x^2 + y^2) - x^2(x^2 + y^2) + 1 = 1.$$

所以积分化为

$$\iint_D 1 \cdot \sqrt{2} dA = \sqrt{2} \cdot \text{面积}(D) = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \sqrt{2} \pi.$$

(7) 曲面  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , 投影区域  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .  $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA$ . 被积函数  $|xyz| = |x||y|(x^2 + y^2)$ . 由对称性, 使用极坐标:

$$\iint_D |x||y|(x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA = \int_0^{2\pi} |\sin \theta \cos \theta| d\theta \int_0^1 r^5 \sqrt{1 + 4r^2} dr.$$

角度部分:

$$\int_0^{2\pi} |\sin \theta \cos \theta| d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2\theta| d\theta = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

径向部分: 令  $u = 1 + 4r^2$ , 则  $r^5 dr = \frac{(u-1)^2}{128} \sqrt{u} du$ , 积分限  $u = 1$  到  $5$ ,

$$\int_0^1 r^5 \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{1}{128} \int_1^5 (u-1)^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{128} \int_1^5 (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}) du = \frac{125\sqrt{5} - 1}{840}.$$

因此总积分为

$$2 \cdot \frac{125\sqrt{5} - 1}{840} = \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}.$$

答案: (1) 9 (3)  $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$  (5)  $\sqrt{2}\pi$  (7)  $\frac{125\sqrt{5} - 1}{420}$

**习题 (11.2.3).** 利用对称性计算曲面积分。

- (1)  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ ,  $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ;  
 (2)  $\iint_S (x + y + z) dS$ ,  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ ).

**解答:** 利用对称性计算曲面积分。

(1). 由于球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  关于坐标平面对称, 且函数  $x^2, y^2, z^2$  在轮换下不变, 故

$$\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS.$$

从而

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS = 2 \iint_S x^2 dS.$$

另一方面,

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_S R^2 dS = R^2 \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^4.$$

而

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = 3 \iint_S x^2 dS,$$

所以

$$\iint_S x^2 dS = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

因此

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS = 2 \cdot \frac{4\pi R^4}{3} = \frac{8\pi R^4}{3}.$$

(2). 上半球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$  关于平面  $x = 0$  和  $y = 0$  对称. 由于  $x$  和  $y$  分别是关于这些平面的奇函数, 故

$$\iint_S x dS = 0, \quad \iint_S y dS = 0.$$

因此

$$\iint_S (x + y + z) dS = \iint_S z dS.$$

采用球坐标参数化:

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta,$$

其中  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , 曲面积分微元  $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . 于是

$$\iint_S z dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot a^2 \sin \theta d\theta = 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

计算积分:

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2}(-1-1) \right] = \frac{1}{2}.$$

故

$$\iint_S z dS = 2\pi a^3 \cdot \frac{1}{2} = \pi a^3.$$

因此

$$\iint_S (x+y+z) dS = \pi a^3.$$

**习题 (11.3.1).** 计算下列第二型曲线积分.

(1)  $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ ,  $L$  是曲线  $y = 1 - |1 - x|$  从点  $(0, 0)$  到点  $(2, 0)$ ;

(2)  $\int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ ,  $L$  是沿顶点为  $A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1)$  的正方形逆时针一周的路径;

(3)  $\int_L \frac{-x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ ,  $L$  是圆周  $x^2 + y^2 = a^2$  沿逆时针方向一周的路径;

(4)  $\int_L y^2 dx + xy dy + xz dz$ ,  $L$  是从  $O(0, 0, 0)$  到  $A(1, 0, 0)$  再到  $B(1, 1, 0)$  最后到  $C(1, 1, 1)$  的折线段;

(5)  $\int_L e^{x+y+z} dx + e^{x+y+z} dy + e^{x+y+z} dz$ ,  $L$  是  $x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = \frac{\varphi}{\pi}$  从点  $A(1, 0, 0)$  到点  $B(0, 1, \frac{1}{2})$ ;

(6)  $\int_L y dx + z dy + x dz$ ,  $L$  是  $x + y = 2$  与  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$  的交线, 从原点看去是顺时针方向.

**解答:**

(1). 曲线  $y = 1 - |1 - x|$  从  $(0, 0)$  到  $(2, 0)$  分为两段直线:

$$L_1: y = x, 0 \leq x \leq 1,$$

$$L_2: y = 2 - x, 1 \leq x \leq 2.$$

在  $L_1$  上: 参数化  $x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$ , 则  $dx = dt, dy = dt$ . 于是

$$(x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = (t^2 + t^2) dt + (t^2 - t^2) dt = 2t^2 dt,$$

所以

$$\int_{L_1} = \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

在  $L_2$  上: 参数化  $x = t, y = 2 - t, 1 \leq t \leq 2$ , 则  $dx = dt, dy = -dt$ . 于是

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy &= (t^2 + (2-t)^2) dt + (t^2 - (2-t)^2) (-dt) \\ &= 2(2-t)^2 dt. \end{aligned}$$

因此

$$\int_{L_2} = \int_1^2 2(2-t)^2 dt = \frac{2}{3}.$$

总积分为  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ .

- (2). 顶点为  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(-1, 0)$ ,  $D(0, -1)$  的正方形沿逆时针方向. 每条边上  $|x|+|y|=1$ , 因此被积函数简化为  $dx + dy$ . 对于闭曲线,

$$\int_L dx = 0, \quad \int_L dy = 0,$$

所以积分为 0.

- (3). 参数化圆周:  $x = a \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (逆时针). 则  $dx = -a \sin \theta d\theta$ ,  $dy = a \cos \theta d\theta$ . 分子变为

$$\begin{aligned} -x dx + y dy &= -a \cos \theta (-a \sin \theta d\theta) + a \sin \theta (a \cos \theta d\theta) \\ &= 2a^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = a^2 \sin 2\theta d\theta, \end{aligned}$$

分母  $x^2 + y^2 = a^2$ . 因此被积函数为  $\sin 2\theta d\theta$ , 且

$$\int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta = 0.$$

- (4). 折线路径由三段组成.

$O \rightarrow A$ : 从  $(0, 0, 0)$  到  $(1, 0, 0)$ ; 参数化  $x = t$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). 所有项为零, 积分为 0.

$A \rightarrow B$ : 从  $(1, 0, 0)$  到  $(1, 1, 0)$ ;  $x = 1$ ,  $y = t$ ,  $z = 0$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). 则  $dx = 0$ ,  $dy = dt$ ,  $dz = 0$ , 且

$$y^2 dx + xy dy + xz dz = (1)(t) dt = t dt, \quad \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

$B \rightarrow C$ : 从  $(1, 1, 0)$  到  $(1, 1, 1)$ ;  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $z = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). 则  $dx = 0$ ,  $dy = 0$ ,  $dz = dt$ , 且

$$y^2 dx + xy dy + xz dz = (1)(t) dt = t dt, \quad \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

总积分:  $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

- (5). 注意到

$$d(e^{x+y+z}) = e^{x+y+z}(dx + dy + dz),$$

所以积分与路径无关. 因此

$$\int_L e^{x+y+z} dx + e^{x+y+z} dy + e^{x+y+z} dz = e^{x+y+z} \Big|_A^B.$$

在  $A(1, 0, 0)$  处  $x + y + z = 1$  得  $e^1 = e$ ; 在  $B(0, 1, \frac{1}{2})$  处  $x + y + z = \frac{3}{2}$  得  $e^{3/2}$ . 因此结果为  $e^{3/2} - e$ .

- (6). 曲线是  $x + y = 2$  与  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$  (化简为  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ) 的交线. 这是半径为  $\sqrt{2}$ 、中心在  $(1, 1, 0)$  且位于平面  $x + y = 2$  上的圆. 给定方向从原点看为顺时针. 使用 Stokes 定理, 取该平面上的圆盘为曲面. 背离原点的法向量为  $\mathbf{n} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}}$ . 对于  $\mathbf{F} = (y, z, x)$ ,

$$\nabla \times \mathbf{F} = (-1, -1, -1).$$

通过圆盘的通量为

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS &= (-1, -1, -1) \cdot \mathbf{n} \cdot \text{面积} \\ &= \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \cdot \pi(\sqrt{2})^2 = -\sqrt{2} \cdot 2\pi = -2\pi\sqrt{2}.\end{aligned}$$

由 Stokes 定理, 它等于具有如下取向的线积分: 该取向与  $\mathbf{n}$  一起遵循右手法则. 该取向正好是所给的方向 (从原点看顺时针). 因此积分为  $-2\pi\sqrt{2}$ .

**习题 (11.3.3).** 设一质点处于弹性力场中, 弹力方向指向原点, 大小与质点离原点的距离成正比, 比例系数为  $k$ . 若质点沿椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  从点  $(a, 0)$  移到点  $(0, b)$ , 求弹性力所做的功.

**解答:** 弹性力是保守力, 其势能函数为  $V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ . 弹性力所做的功等于始末位置势能差的负值, 即  $W = -\Delta V = V(a, 0) - V(0, b)$ .

在起点  $(a, 0)$  处, 势能为  $V(a, 0) = \frac{1}{2}ka^2$ ; 在终点  $(0, b)$  处, 势能为  $V(0, b) = \frac{1}{2}kb^2$ . 因此, 弹性力所做的功为

$$W = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2 = \frac{1}{2}k(a^2 - b^2).$$

**习题 (11.3.4).** 利用 Green 公式, 计算下列曲线积分.

(1)  $\oint_L (x+y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy$ ,  $L$  是顶点为  $A(1, 1), B(3, 3), C(3, 5)$  的三角形的周界, 沿逆时针方向;

(2)  $\oint_L (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$ ,  $L$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 沿顺时针方向;

(3)  $\oint_L (yx^3 + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy$ ,  $L$  是关于两坐标轴对称的闭曲线;

(4)  $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$ ,  $L$  是  $y^2 = x - 1$  与  $x = 2$  围成的封闭曲线, 沿逆时针方向;

(5)  $\int_{AMB} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy$ ,  $L$  是从点  $A(0, -1)$  沿直线  $y = x - 1$  到点  $M(1, 0)$ , 再从  $M$  沿圆周  $x^2 + y^2 = 1$  到点  $B(0, 1)$ ;

(6)  $\int_{AMO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$ , 其中  $AMO$  为由点  $A(a, 0)$  到点  $O(0, 0)$  的上半圆周  $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$ .

**解答:**

(1). 设  $P = (x+y)^2$ ,  $Q = x^2 - y^2$ . 计算偏导数:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

于是

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2(x+y) = -2y.$$

由格林公式 (逆时针方向),

$$\oint_L (x+y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy = \iint_D (-2y) dA,$$

其中  $D$  是以  $A(1, 1), B(3, 3), C(3, 5)$  为顶点的三角形区域. 该三角形可表示为

$$1 \leq x \leq 3, \quad x \leq y \leq 2x - 1.$$

计算二重积分:

$$\begin{aligned}
 \iint_D (-2y) \, dA &= \int_1^3 \int_x^{2x-1} (-2y) \, dy \, dx \\
 &= \int_1^3 [-y^2]_{y=x}^{2x-1} \, dx \\
 &= \int_1^3 [-(2x-1)^2 + x^2] \, dx \\
 &= \int_1^3 (-3x^2 + 4x - 1) \, dx \\
 &= [-x^3 + 2x^2 - x]_1^3 = (-27 + 18 - 3) - (-1 + 2 - 1) = -12.
 \end{aligned}$$

故所求曲线积分为  $-12$ .

(2). 设  $P = xy + x + y$ ,  $Q = xy + x - y$ . 计算偏导数:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1.$$

于是

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (y + 1) - (x + 1) = y - x.$$

曲线方向为顺时针, 由格林公式 (顺时针方向取负),

$$\oint_L P \, dx + Q \, dy = - \iint_D (y - x) \, dA,$$

其中  $D$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的内部区域. 由于区域关于  $x$  轴和  $y$  轴对称, 而  $y$  和  $x$  分别为奇函数, 故

$$\iint_D y \, dA = 0, \quad \iint_D x \, dA = 0,$$

因此  $\iint_D (y - x) \, dA = 0$ . 所以曲线积分为 0.

(3). 设  $P = yx^3 + e^y$ ,  $Q = xy^3 + xe^y - 2y$ . 计算偏导数:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^3 + e^y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^3 + e^y.$$

于是

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (y^3 + e^y) - (x^3 + e^y) = y^3 - x^3.$$

由格林公式 (设  $L$  为逆时针方向),

$$\oint_L P \, dx + Q \, dy = \iint_D (y^3 - x^3) \, dA,$$

其中  $D$  为  $L$  所围区域. 因为  $L$  关于两坐标轴对称, 故  $D$  也关于两坐标轴对称.  $y^3$  关于  $x$  轴为奇函数,  $x^3$  关于  $y$  轴为奇函数, 所以

$$\iint_D y^3 \, dA = 0, \quad \iint_D x^3 \, dA = 0,$$

从而二重积分为 0. 因此曲线积分为 0.

(4). 设  $P = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $Q = y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] = xy^2 + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ . 计算偏导数:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + y \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

于是

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left( y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y^2.$$

曲线方向为逆时针, 由格林公式,

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D y^2 dA,$$

其中  $D$  是由抛物线  $y^2 = x - 1$  与直线  $x = 2$  围成的区域. 区域可表示为  $1 \leq x \leq 2$ ,  $-\sqrt{x-1} \leq y \leq \sqrt{x-1}$ . 计算二重积分:

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 dA &= \int_1^2 \int_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} y^2 dy dx \\ &= \int_1^2 \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} dx \\ &= \int_1^2 \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 u^{3/2} du \quad (u = x-1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

故曲线积分为  $\frac{4}{15}$ .

(5). 设  $P = x^2 + 2xy - y^2$ ,  $Q = x^2 - 2xy + y^2$ . 计算偏导数:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y.$$

由于  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 积分与路径无关. 因此积分值只与起点  $A(0, -1)$  和终点  $B(0, 1)$  有关. 取路径为从  $A$  沿直线  $x = 0$  到  $B$ , 此时  $dx = 0$ ,  $dy$  从  $-1$  到  $1$ . 在该路径上,

$$Q(0, y) = 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot y + y^2 = y^2,$$

所以

$$\int_{AMB} P dx + Q dy = \int_{-1}^1 y^2 dy = \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

(6). 设  $P = e^x \sin y - my$ ,  $Q = e^x \cos y - m$ . 计算偏导数:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y.$$

于是

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - (e^x \cos y - m) = m.$$

考虑由上半圆周  $AMO$  (从  $A(a, 0)$  到  $O(0, 0)$  的上半圆弧) 与直线段  $OA$  (从  $O$  到  $A$  沿  $x$  轴) 组成的闭曲线  $C$ , 方向取逆时针. 由格林公式,

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D m dA = m \cdot \text{Area}(D),$$

其中  $D$  为上半圆盘:  $x^2 + y^2 = ax$  的上半部分, 即圆心  $(a/2, 0)$ , 半径  $a/2$  的半圆. 其面积为  $\frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$ , 故

$$\oint_C P dx + Q dy = \frac{m\pi a^2}{8}.$$

另一方面,

$$\oint_C = \int_{AMO} + \int_{OA}.$$

在直线段  $OA$  上,  $y = 0$ ,  $dy = 0$ , 则

$$\int_{OA} P dx + Q dy = \int_0^a (e^x \sin 0 - m \cdot 0) dx = 0.$$

因此

$$\int_{AMO} P dx + Q dy = \frac{m\pi a^2}{8}.$$