

1 作业解答

3.3.2 $F(1) = F(2) = 0$, 因此存在 $a \in (1, 2)$ 使得 $F'(a) = 0$.

$$F'(x) = 2(x-1)f(x) + (x-1)^2 f'(x),$$

所以 $F'(1) = 0$, 因此存在 $\xi \in (1, a)$ 使得 $F''(\xi) = 0$.

3.3.4

(1). 设 $f(x) = x^n$, 那么 $x > 0$ 时 $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$, 进而 $f'(x)$ 严格单调递增. 由微分中值定理可知, 存在 $\xi \in (b, a)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b},$$

从而

$$f'(b) < f'(\xi) < f'(a),$$

即

$$nb^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a - b} < na^{n-1}.$$

(3). 设 $f(x) = x \ln x$, 题目即证明

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) < f(a) + f(b),$$

即证

$$f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) > f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a),$$

根据微分中值定理,

$$\exists \xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}), \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b) \text{ s.t. } f'(\xi_1) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a), f'(\xi_2) = f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

由于 $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ 且 $\xi_2 > \xi_1$, 所以 $f'(\xi_2) > f'(\xi_1)$, 从而题目得证。

3.3.5

(1). 先分析定义域和连续性: $\arctan$ 函数的定义域是 $\mathbb{R}$, $\arcsin$ 函数的定义域是 $[-1, 1]$, 因此

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in [-1, 1],$$

不难发现

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} < 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

因此左右两式的定义域均为 $x \in \mathbb{R}$. 同时, $\arctan$ 、 $\arcsin$ 、 x 和 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 都在定义域上是光滑函数, 因此左右两边都是光滑函数。

两边同时求导:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \arctan x &= \frac{1}{1+x^2}, \\ \frac{d}{dx} \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2},\end{aligned}$$

因此二者只相差一个常数 C , 注意到 $x=0$ 时两边均等于 0, 从而 $C=0$.

- (2). 先分析定义域和连续性: 令左式 $= f(x)$, 那么 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 上是光滑函数, 在 $x=-1$ 处分别有

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4},$$

此处是跳跃间断点。计算:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(-1, +\infty)$ 分别是一个常数, 根据上面计算的 $x=-1$ 处的左右极限则得到题目结论。

3.3.6 存在性: 令 $g(x) = f(x) - x$, 那么 $g(0) = f(0) > 0$ 、 $g(1) = f(1) - 1 < 0$, 因此存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$.

唯一性: 假设存在 $\xi_1 < \xi_2 \in (0, 1)$ 使得 $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$, 那么根据微分中值定理, 存在 $\xi' \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得 $g'(\xi') = 0$, 即 $f'(\xi') = 1$, 矛盾。

3.3.8 令 $g(x) = e^{-x}f(x)$, 那么 $g(x)$ 处处可导 (进而连续), 且 $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = 0$, 因此 $g'(x) = C$ 是一个常数, 即 $f(x) = Ce^x$.

3.3.10

- (1). 由微分中值定理, 存在 $\xi_x \in (x, x+1)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f(x+1) - f(x),$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时一定有 $\xi_x \rightarrow +\infty$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{\xi_x \rightarrow \infty} f'(\xi_x) = 0.$$

(2). 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得 $x > N$ 时 $|f'(x)| < \varepsilon$, 则此时

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} \right| &= \left| \frac{f(x) - f(N)}{x} + \frac{f(N)}{x} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x) - f(N)}{x} \right| + \left| \frac{f(N)}{x} \right| \\ &= \left| \frac{f'(\xi_N) \cdot (x - N)}{x} \right| + \left| \frac{f(N)}{x} \right| \\ &\leq |f'(\xi_N)| + \left| \frac{f(N)}{x} \right|, \end{aligned}$$

其中 $\xi_N \in (N, x)$. 那么, 我们取 $N' = f(N) \cdot \varepsilon^{-1}$, 则 $x > \max\{N, N'\}$ 时,

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq 2\varepsilon,$$

于是得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

3.3.12 由题设,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \frac{Mh^2}{h} = Mh, \quad \forall h > 0, x \in \mathbb{R},$$

那么, 当 $h \rightarrow 0$ 时 $Mh \rightarrow 0$, 因此

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

即 $f'(x) = 0$, 因此 f 是常数。

3.3.13 (只说明递增的情况, 递减则考虑 $-f(x)$) 设

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in I \setminus \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n : x_i \in I, \forall i\}.$$

记 $X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n : x_i \in I, \forall i\}$, 我们任取 I 中两点 $a < b$, 希望证明 $f(a) < f(b)$.

Case 1: $(a, b) \cap X = \emptyset$. 此时 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 上可导, 并且有

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b),$$

因此 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) > 0$.

Case 2: $|(a, b) \cap X| = k > 0$. 不妨 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \subset (a, b)$, 注意到 $(a, x_1) \cap X = \emptyset$, 由 Case 1 可知 $f(x_1) > f(a)$. 同理可得 $f(b) > f(x_k) > \cdots > f(x_1) > f(a)$.

综上所述 $f(b) > f(a)$, 于是题目得证。

3.3.15 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 那么

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, \forall x > 0.$$

希望证明 $xf'(x) - f(x) > 0$, 即证

$$f'(x) > \frac{f(x)}{x},$$

那么 $\exists \xi_x \in (0, x)$ 使得

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi_x),$$

$f'(x)$ 严格递增 $\Rightarrow f'(x) > f'(\xi_x)$, 从而题目得证。

3.3.18

(1). $y' = 6x(x-1)$, 于是 y 在 $(-\infty, 0) \nearrow, (0, 1) \searrow, (1, +\infty) \nearrow$.

(3). $y' = 2x(1-x)(1+x)e^{-x^2}$, 于是 y 在 $(-\infty, -1) \nearrow, (-1, 0) \searrow, (0, 1) \nearrow, (1, +\infty) \searrow$.

(5). $y' = \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$, 于是 y 在 $(0, 1) \searrow, (1, e^2) \nearrow, (e^2, +\infty) \searrow$.

3.3.19

(2). 分析单调性: $y' = 2\cos 2x - 1$, 于是

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}] & [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] & [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \\ y' & - & + & - \\ y & \searrow & \nearrow & \searrow \end{array}$$

极小值 $y(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$, $y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$, 而

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < 1 < \frac{\pi}{3},$$

所以 $y(\frac{\pi}{2}) < y(-\frac{\pi}{6})$, 最小值是 $-\frac{\pi}{2}$.

极大值 $y(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, $y(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$, 前者更大, 所以最大值是 $\frac{\pi}{2}$.

(4). $y' = \ln x + 1$, y 在 $(0, \frac{1}{e}) \searrow, (\frac{1}{e}, +\infty) \nearrow$. 极小值为 $y(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$, 也是最小值; $x \rightarrow +\infty$ 时 $y \rightarrow +\infty$, 所以没有最大值。

3.3.20

(2). 令

$$f(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3},$$

则

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

于是 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 严格单调递增, 且在 $x=0$ 处连续, 从而 $f(x) > f(0) = 0$, 题目得证。

(4). 令

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \arctan x,$$

那么

$$f'(x) = \ln(x+1) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \ln(x+1) + \frac{x^2}{1+x^2} > 0, \quad x > 0.$$

于是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 严格单调递增, 且在 $x=0$ 处连续, 从而 $f(x) > f(0) = 0$, 题目得证。

(6). 注意到

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x = 1 + \frac{1}{3}(1 - \cos x) < 1 < \frac{x}{\sin x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

当 $x \rightarrow 0+$ 时, 不等式两边均趋于 1, 因此 $\frac{4}{3}$ 不能换成更大的常数。

(8). 令 $f(x) = x^{a-1} + x^{a+1}$,

$$f'(x) = (a-1)x^{a-2} + (a+1)x^a = x^{a-2}(a-1 + (a+1)x^2),$$

所以当 $0 < x \leq \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ 时 $f(x)$ 单调递减, 当 $\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \leq x < 1$ 时 $f(x)$ 单调递增, 因此

$$f(x) \geq f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

3.3.26 左式可以转化为

$$\text{LHS} = \frac{\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}},$$

于是我们令

$$g(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right),$$

左式即

$$\text{LHS} = \frac{g(\frac{1}{a}) - g(\frac{1}{b})}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = g'(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{1}{\zeta}f'\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

其中 $\zeta \in (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$, 则取 $\xi = \zeta^{-1} \in (a, b)$ 即可:

$$\text{LHS} = f(\xi) - \xi f'(\xi) = \text{RHS}.$$

3.4.1

(1).

$$\begin{aligned} \text{OE} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}}}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\beta x)^{\frac{1}{n}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{m}\alpha x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n}\beta x}{x} \quad (1+x)^a \sim ax \quad (x \rightarrow 0) \\ &= \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}. \end{aligned}$$

(2).

$$\text{OE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm(1+mx)^{n-1} - nm(1+nx)^{m-1}}{2x} \quad (\text{洛必达})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm^2(n-1)(1+mx)^{n-2} - n^2m(m-1)(1+nx)^{m-2}}{2} \quad (\text{洛必达})$$

$$= \frac{nm(n-m)}{2}.$$

(3).

$$\text{OE} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = -4. \quad (\text{洛必达})$$

(4).

$$\text{OE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} \quad x \sim \sin x \ (x \rightarrow 0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{3x^2} \quad (\text{洛必达})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} \quad 1 - (1-x)^a \sim ax \ (x \rightarrow 0)$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

(5).

$$\text{OE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

(6).

$$\text{OE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha.$$

(7).

$$\left| \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \right| \leq \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}{|x|} = \frac{|x|}{x^2+1} \rightarrow 0,$$

所以原极限 = 0.

(8).

$$\text{OE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \left((1 + \frac{x}{a})^x - 1 \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \left(e^{x \ln(1 + \frac{x}{a})} - 1 \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \left(x \ln(1 + \frac{x}{a}) \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \frac{1}{a} x^2}{x^2}$$

$$= \frac{1}{a}.$$

(9).

$$|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \rightarrow 0,$$

所以原极限 = 0.

(10).

$$\text{OE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

(11).

$$\begin{aligned} \text{OE} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\tan^2 t} \right) && \text{换元 } t = \tan x \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\tan^2 t - t^2}{t^4} \right) && t \sim \tan t \ (t \rightarrow 0) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2 \tan t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - 2t}{4t^3} \right) && \text{洛必达} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2(\sin t - t \cos^3 t)}{4t^3} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2(\cos t - \cos^3 t + 3t \cos^2 t \sin t)}{12t^2} \right) && \text{洛必达} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2 \cos t (\sin^2 t + 3t \cos t \sin t)}{12t^2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2(1 + 3 \cos t \frac{t}{\sin t})}{12t^2} \right) && t \sim \sin t \ (t \rightarrow 0) \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(12).

$$\begin{aligned} \text{OE} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(1-t) \ln t && \text{换元 } t = 1-x \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} -t \cdot \ln t && t \sim \ln(t+1) \ (t \rightarrow 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(13). 令 $f(x) = (2x - \pi) \ln \tan x$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} -2t \ln \tan \left(\frac{\pi}{2} - t \right) && \text{换元 } t = \frac{\pi}{2} - x \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} 2t \ln \tan t && \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{1}{\tan x} \end{aligned}$$

注意到在 $t > 0$ 且充分小时, 由 $t < \tan t$ 可知

$$|\ln \tan t| < |\ln t|,$$

因此

$$|2t \ln \tan t| < 2t |\ln t| \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow 0^+,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$, 从而原极限 = 1.

(14). 令

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2},$$

那么

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{1+x}}{2x} = -\frac{1}{2},$$

从而原极限 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

(15).

$$\begin{aligned} \text{OE} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right)}{\cot(\pi - \pi t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t + \cot\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{-\cot(\pi t)} \\ &= - \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\cot(\pi t)} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\cot(\pi t)} \right) \\ &= - \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t \cdot \tan \pi t + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\pi t)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \right) \\ &= -(0 + 2) \\ &= -2. \end{aligned}$$

(16).

$$\text{OE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2 \cdot x^2} = 2.$$

(17). 注意到

$$\frac{\ln \ln(1+x) - \ln x}{x} = \frac{\ln \ln(1+x)}{x} - \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 - 0 = 0 \text{ as } x \rightarrow +\infty,$$

所以原极限 $= 1$.

(18).

$$\begin{aligned} \text{OE} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x \sin x - \cos x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2 + x^2} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

这里用了之前提到的“同阶不等价无穷小的相减运算可以替换等价无穷小”。当然，用一次洛必达也可以得到答案。

(19).

$$\begin{aligned} k \ln n - n \ln a &= 2k \ln \sqrt{n} - n \ln a \\ &< 2k(\sqrt{n} - 1) - n \ln a \rightarrow -\infty \text{ as } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

于是原极限 = 0.

(20).

$$\frac{\ln n}{n^k} = \frac{\frac{2}{k} \ln n^{\frac{k}{2}}}{n^k} < \frac{2}{k} \cdot \frac{n^{\frac{k}{2}} - 1}{n^k} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty,$$

于是原极限 = 0.

3.4.2

(1). $0 < x_{n+1} = f(x_n) < x_n$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 从而收敛. 设 $x_n \rightarrow \ell$, 那么因为 $f(x)$ 连续, 所以对 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边同时求极限可得 $\ell = f(\ell)$. 当 $x \in (0, a)$ 时 $a > x > f(x)$, 所以只可能 $\ell = 0$.

(2). 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot f(x)}{x - f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + x \cdot f'(x)}{1 - f'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2f'(x) + x \cdot f''(x)}{-f''(x)} \\ &= -\frac{2}{f''(0)}. \end{aligned}$$

附加： 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} \right)^{\sin x}.$$

极限本身是一个幂型 (∞^0) 未定式, 则取对数:

$$g(x) = \ln f(x) = -\sin x \ln \tan x = -\frac{\ln \tan x}{\frac{1}{\sin x}},$$

 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 使用洛必达法则:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x \cos x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0,$$

因此原极限 = 1.