3.1.18

(2). $y' = 2x \cdot 2^x + x^2 2^x \ln 2$，$y'' = 2^{x+1} + 2x \cdot 2^{x+1} \ln 2 + x^2 2^x (\ln 2)^2$.

(4).

$$y' = \begin{cases} 2x & .x > 0 \\ 0 & ,x = 0 \\ -2x & ,x < 0 \end{cases} = 2|x|,\ y'' = \begin{cases} 2 & ,x > 0 \\ \text{不存在} & ,x = 0 \\ -2 & ,x < 0 \end{cases}$$

3.1.19

(1).

$$\begin{aligned} y &= f(x^2) \\ y' &= 2x \cdot f'(x^2) \\ y'' &= 2f'(x^2) + 4x^2 \cdot f''(x^2) \\ y''' &= 12x \cdot f''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2) \end{aligned}$$

(2).

$$\begin{aligned} y &= f(\mathrm{e}^x + x) \\ y' &= (\mathrm{e}^x + 1) f'(\mathrm{e}^x + x) \\ y'' &= (\mathrm{e}^x + 1)^2 f''(\mathrm{e}^x + x) + \mathrm{e}^x \cdot f'(\mathrm{e}^x + x) \\ y''' &= (\mathrm{e}^x + 1)^3 f'''(\mathrm{e}^x + x) + \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1) \cdot f''(\mathrm{e}^x + x) + \mathrm{e}^x \cdot f'(\mathrm{e}^x + x) \end{aligned}$$

3.1.20 记 $f_n(x) = x^n \cdot |x|$. 我们证明更强的命题：$f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 n 阶可导，在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上 $n+1$ 阶可导，在 $x = 0$ 处 $n+1$ 阶导数不存在。

（归纳法）当 $n = 0$ 时命题显然成立；假设命题对 $\leqslant n$ 成立，那么考虑 $n+1$ 的情形，

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} x^{n+2} & ,x \geqslant 0 \\ -x^{n+2} & ,x < 0 \end{cases}$$

则

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0,$$

因此

$$f'_{n+1}(x) = \begin{cases} (n+2)x^{n+1} & ,x > 0 \\ 0 & ,x = 0 \\ -(n+2)x^{n+1} & ,x < 0 \end{cases} = (n+2) f_n(x).$$

进而 $f_{n+1}(x)$ 满足在 $\mathbb{R}$ 上 $n+1$ 阶可导，在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上 $n+2$ 阶可导，在 $x = 0$ 处 $n+2$ 阶导数不存在。于是命题得证。

3.1.21 我们利用积法则的 n 阶二项式展开：

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

所以：

$$
\begin{aligned}
(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)} &= \left(x^2+2nx+n(n-1)\right)\mathrm{e}^x \\
((x^2+1)\sin x)^{(n)} &= (x^2+1)\cdot(\sin x)^{(n)} + 2nx\cdot(\sin x)^{(n-1)} + n(n-1)\cdot(\sin x)^{(n-2)} \\
&= \begin{cases}
(x^2+1)\cdot\sin x - 2nx\cdot\cos x - n(n-1)\cdot\sin x & ,n=4k,k\in\mathbb{N} \\
(x^2+1)\cdot\cos x + 2nx\cdot\sin x - n(n-1)\cdot\cos x & ,n=4k+1,k\in\mathbb{N} \\
-(x^2+1)\cdot\sin x + 2nx\cdot\cos x + n(n-1)\cdot\sin x & ,n=4k+2,k\in\mathbb{N} \\
-(x^2+1)\cdot\cos x - 2nx\cdot\sin x + n(n-1)\cdot\cos x & ,n=4k+3,k\in\mathbb{N}
\end{cases} \\
\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)} &= \left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(i)} \cdot \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i\cdot i!\cdot(x-1)^{-(i+1)}\cdot(-1)^{n-i}\cdot(n-i)!\cdot(x-2)^{-(n-i+1)} \\
&= (-1)^n\cdot n!\cdot\sum_{i=0}^{n}(x-1)^{-(i+1)}(x-2)^{-(n-i+1)}
\end{aligned}
$$

对于 (4)，如果仍然使用同样的方法：

$$
(\sin x\cdot\cos x)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i(\sin x)^{(i)}(\cos x)^{(n-i)},
$$

这个形式不太好化简。我们可以利用二倍角公式：

$$
(\sin x\cdot\cos x)^{(n)} = \frac{1}{2}(\sin 2x)^{(n)} = \begin{cases}
2^{n-1}\sin 2x & ,n=4k,k\in\mathbb{N} \\
2^{n-1}\cos 2x & ,n=4k+1,k\in\mathbb{N} \\
-2^{n-1}\sin 2x & ,n=4k+2,k\in\mathbb{N} \\
-2^{n-1}\cos 2x & ,n=4k+3,k\in\mathbb{N}
\end{cases}
$$

注：因为

$$
(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),
$$

所以归纳可得

$$
(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),
$$

因此 (2)、(4) 的答案也可以写成

$$
(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)} = (x^2+1)\cdot\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cdot\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1)\cdot\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right),
$$

$$
(\sin x\cdot\cos x)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i(\sin x)^{(i)}(\cos x)^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \sin\left(x+\frac{i\pi}{2}\right)\sin\left(x+\frac{(n-i+1)\pi}{2}\right),
$$

或者

$$
(\sin x\cdot\cos x)^{(n)} = \frac{1}{2}(\sin 2x)^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).
$$

3.2.2

(1).

$$\mathrm{d}y=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{x-2\pi}\mathrm{d}x.$$

(2). 注意到 $|x|=\frac{1}{\cos y}$，因此

$$\operatorname{sgn}(x)\mathrm{d}x=\frac{\sin y}{\cos^2 y}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{|x|^2}}\mathrm{d}y=|x|\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}y,$$

所以

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$$

(3).

$$\mathrm{d}y=5^{\sqrt{\arctan x^2}}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{2\sqrt{\arctan x^2}}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot(2x)\mathrm{d}x=\frac{\ln 5\cdot 5^{\sqrt{\arctan x^2}}\cdot x}{(1+x^4)\sqrt{\arctan x^2}}\mathrm{d}x.$$

(4).

$$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}(-\cos(3-x)+\sin(3-x))\mathrm{d}x.$$

3.2.3

(1).

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y=\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{2}\left(=\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{2}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1+t^2}{4t}\left(=\frac{\mathrm{e}^x}{4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\right).$$

(3).

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ \mathrm{d}y=(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\end{cases}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{2+\varphi^2}{(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{2+\varphi^2}{(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^3}.\end{aligned}$$

3.2.4(1).

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t,$$

于是切线斜率 $k=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$，切点为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，所以切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

即 $x+y=\sqrt{2}$.