

2.2.13 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 所以

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall x_1, x_2 \in (a, b).$$

因为 $0 < x_1 - a < \delta$ 且 $0 < x_2 - a < \delta$ 时 $|x_1 - x_2| < \delta$, 所以 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 由函数的柯西收敛准则可知 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在, 同理可得 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在。

注: 如果用数列的 Cauchy 准则证明 “任取数列 $a_n \searrow a$, $f(a_n)$ 收敛”, 依然不能说明 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在, 因为没有证明 $\{f(a_n)\}$ 极限的唯一性。

2.2.14 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续, 所以

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty).$$

那么, 对于 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得 $n, m > N$ 时 $|a_n - a_m| < \delta$, 从而 $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$, 因此由数列的柯西收敛准则可知 $\{f(a_n)\}$ 收敛。

仅假设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 则不一定收敛, 例如取 $f(x) = \frac{1}{x}$, $a_n = \frac{1}{n}$ 。

2.2.16 例如 $f(x) = \sin x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界, 但不一致连续。考虑

$$x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, y_n = \sqrt{2n\pi}, n \in \mathbb{N}_+.$$

那么 $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$, 但

$$|x_n - y_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi}} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

假如 $f(x)$ 一致连续, 那么 $|x_n - y_n| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$, 矛盾。

3.1.3

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)g(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

注: 本题没有说明 $g(x)$ 可导, 因此不能用积法则。

3.1.4

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} &= \alpha \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} + \beta \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{\beta h} \\ &= (\alpha + \beta)f'(x_0). \end{aligned}$$

3.1.5 因为 $f(a) \neq 0$ 以及 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导 (进而连续), 所以 x 充分靠近 a 时, 一定有 $f(x)/f(a) > 0$. 此时有

$$\begin{aligned} |f(x)| - |f(a)| &= |f(a)| \cdot \left(\left| \frac{f(x)}{f(a)} \right| - 1 \right) \\ &= |f(a)| \cdot \left(\frac{f(x)}{f(a)} - 1 \right) \\ &= f(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(a)) - |f(a)| \\ &= (f(x) - f(a)) \cdot \operatorname{sgn}(f(a)) \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \operatorname{sgn}(f(a)) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \operatorname{sgn}(f(a)) f'(a).$$

若 $f(a) = 0$ 则结论不一定成立, 例如 $f(x) = x$, $a = 0$.

3.1.6 奇数小问按顺序分别为:

$$y' = \frac{(6x+9)(5x+8) - 5(3x^2+9x-2)}{(5x+8)^2} = \frac{15x^2+48x+82}{(5x+8)^2}.$$

$$y' = \left(\frac{x^2 \ln x}{\ln 3} \right)' = \frac{2x \ln x + x}{\ln 3}.$$

$$y' = \frac{\frac{1-\ln x}{x} + \frac{1+\ln x}{x}}{(1-\ln x)^2} = \frac{2}{x(1-\ln x)^2}.$$

$$y' = (-3x^6 + x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x - 1)' = -18x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x + 3.$$

3.1.7

(1).

$$y' = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3).

$$\begin{aligned} \cos y = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} &\Rightarrow -\sin y \cdot y' = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow y' = -\frac{2}{\sqrt{3} \sin y} = -\frac{2}{\sqrt{3(1 - \frac{(2x-1)^2}{3})}} = -\frac{2}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 2}}. \end{aligned}$$

注意这里 $\arccos$ 的值域是 $[0, \pi)$, 所以总有 $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

(5).

$$y' = 3(\sin x^3)^2 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = 9x^2 \sin^2 x^3 \cos x^3.$$

(7).

$$y' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x.$$

(9).

$$y' = 3 \left(\frac{x^3-1}{x^4+1} \right)^2 \cdot \frac{3x^2(x^4+1) - 4x^3(x^3-1)}{(x^4+1)^2} = \frac{3(x^3-1)^2(-x^6+4x^3+3x^2)}{(x^4+1)^4}.$$

(11).

$$y' = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(13). 逐项求导, 先考虑 $f(x) = x^x$,

$$\ln f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1),$$

令 $g(x) = x^{x^x} = x^{f(x)}$, 则

$$\ln g(x) = f(x) \ln x \Rightarrow g'(x) = g(x) \cdot (f'(x) \ln x + f(x) x^{-1}) = x^{x^x} \cdot x^x ((\ln x + 1) \ln x + x^{-1}),$$

令 $h(x) = x^{2^x}$, 则

$$\ln h(x) = 2^x \ln x \Rightarrow h'(x) = h(x) \cdot (\ln 2 \cdot 2^x \ln x + 2^x x^{-1}) = x^{2^x} \ln x \cdot (\ln 2 \cdot 2^x \ln x + 2^x x^{-1}).$$

最终结果就是把上面三个式子加起来。

(15).

$$\begin{aligned} \ln y &= \cot x \ln \tan x \\ \Rightarrow y' &= y \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \ln \tan x + \cot^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) \\ &= \tan x^{\cot x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \ln \tan x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= \frac{\tan x^{\cot x} (1 - \ln \tan x)}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

(17).

$$\begin{aligned} \ln y &= 2 \ln(x+5) + \frac{1}{3} \ln(x-4) - 5 \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x+4) \\ \Rightarrow y' &= y \cdot \left(\frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)} \right) \\ &= \frac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^5(x+4)^{1/2}} \cdot \left(\frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)} \right). \end{aligned}$$

3.1.8

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2, \\ f'(x^2) &= 3x^4, \\ (f(x^2))' &= (x^6)' = 6x^5. \end{aligned}$$

注意, $f'(x^2)$ 的含义是“函数 f 在 x^2 处的导数”, 因此

$$f'(x^2) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=x^2} = 3t^2|_{t=x^2} = 3x^4.$$

3.1.10 奇数小问按顺序分别为:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 \cdot f'(x^3), \\ y' &= (e^x + ex^{e-1})f'(e^x + x^e), \\ y' &= f'(f(f(\sin x + \cos x))) \cdot (f(f(\sin x + \cos x)))' \\ &= f'(f(f(\sin x + \cos x))) \cdot f'(f(\sin x + \cos x)) \cdot (f(\sin x + \cos x))' \\ &= f'(f(f(\sin x + \cos x))) \cdot f'(f(\sin x + \cos x)) \cdot f'(\sin x + \cos x) \cdot (\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

3.1.12

(1). 考虑极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

不存在, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

(2). 考虑极限:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

因此

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

注意 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在, 因此 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续 (第二类间断点)。

(3). 考虑极限:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

因此

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

注意 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, 所以 $f'(x)$ 连续,

3.1.13 考虑极限:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

因此

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

考虑

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

那么

$$f'(a_n) = -4n\pi \rightarrow -\infty,$$

所以 $f'(x)$ 无界。

3.1.14

(1).

$$y = x^2 + 2e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + 2e^x \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2(x + e^x)}.$$

(2).

$$y = \arctan \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -(1+x^2).$$

(3).

$$y = 2x^{-x} - e^{-2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2(\ln x + 1)x^{-x} + 2e^{-2x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{-2(\ln x + 1)x^{-x} + 2e^{-2x}}.$$

(4).

$$y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x}.$$

3.1.16 设 $f(x)$ 是周期为 T 的可导函数, 那么

$$f'(x+T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

即 T 也是 $f'(x)$ 的周期。

3.1.17

(1).

$$P_n(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)' = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, \quad x \neq 1.$$

当 $x = 1$ 时, $P_n(1) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(2).

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= (x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n)' \\ &= (x \cdot P_n(x))' \\ &= \left(\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} \right)' \\ &= \frac{-n^2x^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + x + 1}{(1-x)^3}, \quad x \neq 1. \end{aligned}$$

或者

$$Q_n(x) = \frac{(1+x)(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(1-x)^3} - \frac{n(n+1)x^n}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

$x = 1$ 时, $Q_n(x) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(3). 令

$$f(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \neq 0.$$

那么

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{x}{2} + \frac{n+1}{2} \sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \cos x + 2 \cos 2x + \cdots + n \cos nx. \end{aligned}$$

所以

$$R_n = f'(1) = \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n}{2} \sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2} \cos \frac{n+1}{2} \sin \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{n}{2} \sin \frac{n+1}{2} \cos \frac{1}{2}}{\sin^2 \frac{1}{2}}.$$

或者

$$R_n = \frac{n \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{n}{2}}{2 \sin^2 \frac{1}{2}}.$$

或者

$$R_n = \frac{(n+1) \cos n - n \cos (n+1) - 1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}}.$$

3.1.22 $y = \cos x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线斜率为 $y'(\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 切线方程为:

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.1.23 $xy = 1$,

$$y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

所以曲线上一点 (x_0, y_0) 的切线斜率为 $-\frac{y_0}{x_0}$, 切线方程为

$$y = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0) + y_0,$$

纵横截距分别为 $2y_0$ 和 $2x_0$, 所以围成的三角形面积为 $2x_0y_0 = 2$.