

1 作业解答

1.3.14 曲线 $y = f(x)$ 上一点 $(x, f(x))$ 到直线 $y = ax + b$ 上的距离为

$$d(x) = \frac{|ax + b - f(x)|}{\sqrt{1 + a^2}},$$

那么

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} |ax + b - f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b.$$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ 蕴含

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax}{x} = b \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

(1). $y(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -\frac{1}{e}) \cup (0, +\infty)$, 计算可得:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}^-} y(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty,$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{ex} = \frac{1}{e}.$$

综上所述, 有垂直渐近线 $x = -\frac{1}{e}$ 、无水平渐近线、有斜渐近线 $y = x + \frac{1}{e}$.

(2). $y(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 计算可得:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty,$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 - x} = 3,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x - 1} = 1.$$

综上所述, 有垂直渐近线 $x = 1$, 无水平渐近线, 有斜渐近线 $y = 3x + 1$.

1.3.16

(1).

$$\tan x - \sin x = \frac{(1 - \cos x) \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \sin x}{\cos x} \sim \frac{1}{2} x^3.$$

因此 $\tan x - \sin x$ 和 x^3 是同阶无穷小。(2). $x^3 + x^2 \sim x^2$, $\sin^2 x \sim x^2$, 是等价无穷小。(3). $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{1}{2} x^2$, 是同阶无穷小。1.3.18 $x \rightarrow 0$ 时,

$$(1+x)^a - 1 = e^{a \ln(1+x)} - 1 \sim a \ln(1+x) \sim ax.$$

同理, $1 - (1-x)^a \sim ax$. 本题多次利用了这两个结论。

(1).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

(2).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} = a.$$

(3).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sin x}{x} = \frac{1}{n}.$$

(4).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1 - \cos x}{2}} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{1 - \cos x}{4}}{x^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

(5).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x + x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

(6).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{\frac{1}{2} x^2} = 1.$$

2.1.1 不一定, 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处不连续, 但满足题目条件。

2.1.4

(1). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$.

(2). 只需注意到

$$M(x) = \frac{|f(x) - g(x)| + (f(x) - g(x))}{2}, \quad m(x) = \frac{|f(x) - g(x)| - (f(x) - g(x))}{2}.$$

2.1.5

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

2.1.6

- (1). $x = 2$, $f(x)$ 在 $x = 2$ 的左右极限均不存在, 所以是第二类间断点。
 (2). $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, 所以是跳跃间断点。
 (3). $\{x = k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, $f(x)$ 在这些点处的左右极限均等于 0, 所以是可去间断点。
 (4). $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, 所以是跳跃间断点。
 (5). $x = -7$, 左极限不存在, 所以是第二类间断点; $x = 1$ 处, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, 所以是跳跃间断点。
 (6). $f(x)$ 是连续函数, 没有间断点。

2.1.15 取 $x = y = 0$ 可得 $f(0) = 0$, 我们归纳证明:

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_+ \quad (1)$$

1° 命题对 $n = 1$ 显然成立;

2° 假设命题对 n 成立, 那么 $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x)$, 即命题对 $n+1$ 也成立。

于是 $f(n) = n \cdot f(1)$ 得证。

Step1. 证明 $f(x) = x \cdot f(1)$ 对于所有 $x \in \mathbb{N}$ 成立。
由 (1) 显然。

Step2. 证明 $f(x) = x \cdot f(1)$ 对于所有 $x \in \mathbb{Z}$ 成立。
取 $x \in \mathbb{N}$, $y = -x$, 可得 $f(-x) = -f(x) = -x \cdot f(1) = y \cdot f(1)$ 。

Step3. 证明 $f(x) = x \cdot f(1)$ 对于所有 $x \in \mathbb{Q}$ 成立。
对于有理数 $x = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ 且互质, 那么

$$q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = p \cdot f(1),$$

因此

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot f(1).$$

Step4. 证明 $f(x) = x \cdot f(1)$ 对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立。

由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是稠密的, 即任意 $x \in \mathbb{R}$ 都可以取一列 $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ 使得 $x_n \rightarrow x$, 所以根据 $f(x)$ 的连续性,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot f(1) = x \cdot f(1).$$

2.1.17

(1). 1.3.18(5).

(2). 1.3.18(6).

(3).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[10]{1 + \tan x} - 1)(\sqrt{1 + x} - 1)}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{10} \tan x \cdot \frac{1}{2} x}{2x^2} = \frac{1}{40}.$$

(4).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$$

(5).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos x)^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4}{x^4} = \frac{1}{8}.$$

(6).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 100} + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{1 + 100x^2} + 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-50x^2}{x^2} = -50. \end{aligned}$$

(7).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}. \end{aligned}$$

注意

$$\left| \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq \left| \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right| \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow +\infty,$$

所以原极限 = 0.

(8).

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow -\infty,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2}.$$

2.2.2 $f(x) = x - a \sin x - b$ 是连续函数, $f(0) = -b < 0$, $f(a+b) = a - a \sin x \geq 0$, 所以根据介值定理可知 $f(x)$ 在 $(0, a+b]$ 上一定有零点。另一方面, 当 $x > a+b$ 时, $f(x) > a+b-a-b=0$, 因此 $f(x)$ 所有的零点都在 $(0, a+b]$ 内。

2.2.4 考虑 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$, 所以根据介值定理可知 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定有零点, 也就是 $f(x)$ 的不动点。

2.2.6 考虑 $g(x) = f(x) - f(x+a)$, 那么

$$g(0)g(a) = (f(0) - f(a))(f(a) - f(2a)) = -(f(0) - f(a))^2 \leq 0,$$

所以根据介值定理可知 $g(x)$ 在 $[0, a]$ 上一定有零点 x_0 , 那么 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

2.2.8 设 $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 那么存在 $M > 0$ 使得 $x > M$ 时 $f(x) < \ell + 1$, 又因为 $f(x)$ 是连续函数, 所以 $f(x)$ 在 $[a, M]$ 上有界, 不妨设上界为 M_0 , 那么

$$f(x) \leq \max\{M, M_0\}, \forall x \in [a, +\infty).$$

2.2.11 考虑

$$f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}, \quad x \in (a, b)$$

即可。

2 作业反馈与补充

2.1 等价无穷小代换

整理一些常用的结论: $x \rightarrow 0$ 时,

(1). 一阶:

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(x+1) \sim \frac{(1+x)^a - 1}{a} \sim \frac{1 - (1-x)^a}{a}.$$

(2). 二阶:

$$\frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x \sim e^x - 1 - x \sim x - \ln 1 + x.$$

(3). 三阶:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}x^3 &\sim x - \sin x \sim \arcsin x - x, \\ \frac{1}{3}x^3 &\sim \tan x - x \sim x - \arctan x. \end{aligned}$$

在特殊情况下, 加减关系也可以进行等价无穷小替换 (但非常不建议在考试中使用! 如果算错答案就没有过程分)。

命题. 如果 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ 并且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \ell \neq 1,$$

那么

$$\alpha(x) - \beta(x) \sim \alpha_1(x) - \beta_1(x).$$

即, 当相减项是**同阶但不等价**无穷小时, 可以进行代换。

证明: 只需注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha_1(x) - \beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x) \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \right)}{\beta_1(x) \left(\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)(\ell - 1)}{\beta_1(x)(\ell - 1)} = 1.$$