1 作业解答

1.2.15.

(1). 注意到

$$\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},$$

也就是

$$\frac{1}{4n}\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\leqslant\frac{1}{n}.$$

当 $n\to\infty$ 时，左右两边都 $\to 0$，因此原极限等于 0.

(2). 注意到：

$$\begin{aligned}0<(n+1)^k-n^k&=n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]\\&\leqslant n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=n^{k-1}\to 0\text{ as }n\to\infty\end{aligned}$$

因此原极限等于 0.

(3).

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}&=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}\\&=2^{1-\frac{1}{2^n}}\to 2\text{ as }n\to\infty.\end{aligned}$$

(4). 当 $n>2$ 时 $\sqrt[n]{n^2-n+2}>1$，令 $\sqrt[n]{n^2-n+2}=1+\lambda_n$，则有[1]

$$\begin{aligned}n^2-n+2&=(1+\lambda_n)^n\\&=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\lambda_n^3+\cdots\\&>\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\lambda_n^3\\\Rightarrow\lambda_n&<\sqrt[3]{\frac{6}{n}}.\end{aligned}$$

于是

$$0<\sqrt[n]{n^2-n+2}-1=\lambda_n<\sqrt[3]{\frac{6}{n}}\to 0\text{ as }n\to\infty,$$

因此 $\sqrt[n]{n^2-n+2}\to 1$.

(5). 注意到 $\cos^2 1+\cos^2 3>1$，所以

$$1<\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}<\sqrt[n]{n}\to 1\text{ as }n\to\infty.$$

因此原极限等于 1.

[1]相比于课本第 14 页例 1.2.11，这里我们展开到了三次项，这是因为根号下的多项式是二次的，我们需要用更高次的多项式去“控制”。

1.2.16 不妨 $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m$，那么

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_m^n} &\leqslant \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_m^n} \leqslant \sqrt[n]{m \cdot a_m^n} \\ \Rightarrow a_m &\leqslant \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_m^n} \leqslant \sqrt[n]{m} \cdot a_m.\end{aligned}$$

注意 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = 1$，因此原极限等于 a_m，即 $\max\{a_1, \cdots, a_m\}$.

1.2.17

(1). 可以列出递推关系：$a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$，因为 $a_n > 0$，$\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 1$，所以 a_n 单调递减且有下界，因此收敛。

(2). a_n 显然是单调递增的，而且

$$a_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2},$$

所以有上界，因此收敛。

(3). 任取 $p \in \mathbb{N}_+$，

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &= \left|\alpha_{n+1} q^{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p} q^{n+p}\right| \\ &\leqslant M|q|^{n+1} + \cdots + M|q|^{n+p} \\ &= M \cdot \frac{1 - |q|^{p+1}}{1 - |q|} \cdot |q|^n \\ &< M \cdot \frac{1}{1 - |q|} \cdot |q|^n.\end{aligned}$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$，令

$$N = \left\lceil \log_{|q|} \frac{\varepsilon}{M \cdot \frac{1}{1-|q|}} \right\rceil$$

那么 $n > N$ 时总有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$，由柯西收敛准则可知原数列收敛。

(4). 任取 $p \in \mathbb{N}_+$，

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \\ &< \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$，令 $N = \lceil \epsilon^{-1} \rceil$，则当 $n > N$ 时，总有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$，因此原数列收敛。

1.2.18

(1). 注意到

$$\begin{aligned}c^n = (1 + (c-1))^n &= 1 + n(c-1) + \frac{n(n-1)}{2}(c-1)^2 \\ &> \frac{n(n-1)}{2}(c-1)^2,\end{aligned}$$

因此

$$0 < \frac{n}{c^n} < \frac{2}{(n-1)(c-1)^2} \to 0 \text{ as } n \to \infty,$$

所以 $a_n \to 0$.

(2). 令

$$\alpha = 1 - \sqrt{1-c},\ \beta = 1 + \sqrt{1+c}.$$

它们是方程 $x = \frac{c}{2} + \frac{x^2}{2}$ 的两个解，而且 $\alpha < \beta$. 我们先用归纳法证明：$0 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

Step 1. $n = 1$ 时命题成立，因为

$$\alpha - \frac{c}{2} = \frac{\alpha^2}{2} \geqslant 0.$$

Step 2. 假设命题对 n 成立，那么

$$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} \leqslant \frac{c}{2} + \frac{\alpha^2}{2} = \alpha,$$

所以命题对 $n+1$ 也成立。

再证明 a_n 单调递增：

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 - 2a_n + c}{2} = \frac{(a_n - \alpha)(a_n - \beta)}{2} \geqslant 0.$$

于是 a_n 收敛，设其极限为 a，那么 a 满足方程 $x = \frac{c}{2} + \frac{x^2}{2}$，结合 $a_n \in [0, \alpha]$，得到 $a = \alpha$.

(3). 归纳法易证 $a_n > 0$，于是

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a} = \sqrt{a},\ \forall n \geqslant 1.$$

因此

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{a - a_n^2}{a_n} \leqslant 0,$$

所以数列 a_n 单调递减且有下界，从而收敛。设其极限为 x，则

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),\ x \geqslant 0.$$

得到 $x = \sqrt{a}$.

(4). 令

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

它们是方程 $x = 1 + \frac{x}{x+1}$ 的两个解，且 $\beta < 1 < \alpha$. 我们先用归纳法证明：$1 \leqslant a_n \leqslant \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Step 1. $n = 0$ 时显然成立；

Step 2. 假设命题对 n 成立，那么

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{a_n + 1} \leqslant 1 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} = \alpha.$$

所以命题对 $n+1$ 也成立。

再证明：$\{a_n\}$ 单调递增。只需注意到

$$a_{n+1}-a_n=\frac{-a_n^2+a_n+1}{a_n+1}=-\frac{(a_n-\alpha)(a_n-\beta)}{a_n+1}\geqslant 0.$$

于是 $\{a_n\}$ 收敛，设其极限为 a，那么 a 满足

$$a=1+\frac{a}{a+1},\ a\in[1,\alpha].$$

可得 $a=\alpha$.

(5). 归纳法易证 $a_n\in[0,1]$，由递推关系 $a_{n+1}=\sin a_n\leqslant a_n$ 可知数列单调递减，所以收敛。设其极限为 a，则 $a=\sin a$ 且 $a\in[0,1]$，得到 $a=0$.

1.2.20　取 $\varepsilon=\frac{l-1}{2}>0$，那么存在 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得 $n>N$ 时

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>l-\varepsilon=\frac{l+1}{2}.$$

因此 $a_n<\frac{2}{l+1}a_{n+1}<a_{n+1}$，所以单调递减。又因为 $a_n>0$，所以收敛。倘若 $a_n\to a\neq 0$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a}{a}=1\neq l,$$

矛盾。因此 $a_n\to 0$.

1.2.21　$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是正数列，所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n},$$

即数列 $c_n=\frac{a_n}{b_n}>0$ 是单调递减的，因此收敛，进而 $a_n=c_n\cdot b_n$ 也收敛。

1.2.22　记

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n\in\mathbb{N}_+.$$

(1). $a_n=e_{2n+1}$，是数列 $\{e_n\}$ 的子列，所以极限为 e.

(2).
$$\frac{1}{a_n}=\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^{n+1}=e_{n-3}\cdot\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^4\to e,$$

从而 $a_n\to\frac{1}{e}$.

(3).
$$\frac{1}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e_{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\to e,$$

从而 $a_n\to\frac{1}{e}$.

(4). $\sqrt{a_n}=e_{n^3}\to e$，所以 $a_n\to e^2$.

1.2.23　$\forall M>0$，存在 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得 $n>N$ 时 $|a_n|>\frac{1}{b}M$，从而 $|a_nb_n|\geqslant b|a_n|>M$，所以 $a_nb_n\to\infty$.

1.2.25　归纳法易证 $a_n > 0$，那么 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} > 0$ 表明 a_n 严格单调递增。如果 $a_n \nrightarrow +\infty$，则 $\{a_n\}$ 一定有界[2]，从而收敛。设极限为 a，那么 $a = a + \frac{1}{a}$，无解，从而矛盾。

1.3.1
(1). $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \log_a \varepsilon$，则 $x < \delta$ 时 $|a^x| < \varepsilon$.
(2). $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$，那么 $|x| > \delta$ 时，

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{2}{x+1} \right| \leqslant \frac{2}{|x|-1} < \varepsilon.$$

(3). $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$，那么 $|x+1| < \delta$ 时，

$$\left| \frac{x^2-1}{x^2+x} - 2 \right| = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(4). $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon^{1-\frac{1}{q}}$，那么 $0 < x < \delta$ 时，$|x^{\frac{1}{q}}| < \varepsilon$.

1.3.4　任取 $\varepsilon > 0$，存在 δ 使得 $x > \delta$ 时 $|f(x) - l| < \varepsilon$，存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得 $n > N$ 时 $a_n > \delta$，进而 $|f(a_n) - l| < \varepsilon$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

2　作业反馈与补充

2.1　关于 Cauthy 收敛准则的应用（重要）

这次批改作业注意到 1.2.17(3) 很多同学的过程是这样的：

$$|a_{n+p} - a_n| < M \cdot \frac{1-|q|^{p+1}}{1-|q|} \cdot |q|^n \to 0 \text{ as } n \to \infty,$$

所以 $\{a_n\}$ 收敛。但是，只用“$|a_{n+p} - a_n| \to 0$”就得到数列收敛是非常不严谨的，见下例：

例 2.1.

考虑数列

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

那么，$\forall p \in \mathbb{N}_+$，

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \\ &\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{p}{n}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0,$$

但我们熟知 a_n 是发散到无穷大的。

[2]见课本第 23 页定理 1.20.

让我们首先回顾 Cauthy 收敛准则：设数列 $\{a_n\}$，那么 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+ \text{使得对于} \forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N}_+ \text{都有} |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

注意，"$\forall p \in \mathbb{N}_+$"是出现在"$\exists N \in \mathbb{N}_+$"**之前的，这表明 N 的选取应当是与 p 无关的**。这意味着我们往往需要把 $|a_{n+p} - a_n|$ 放缩到一个与 p 无关的、趋于 0 的式子，才能够得到结论。

希望同学们能理解命题表述中"存在"、"任意"这样的字眼出现的顺序意味着什么，这对于我们之后的学习中理解"一致连续"、"一致收敛"等概念非常有帮助，同时也能让自己的语言表述更加严谨。

2.2　关于极限的运算

我们已经证明了极限是满足四则运算的。之后我们会学习连续函数的性质，例如指对数函数 e^x、$\ln x$ 在其定义域内都是连续的。函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续的定义是：$f(x)$ 在 x_0 附近的一个邻域内有定义，并且

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

如果数列 $\{a_n\}$ 的极限是 x_0，那么

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0).$$

这一结论的证明方法和本次作业的 1.3.4 完全相同，此处不再赘述。于是，我们处理数列极限就有了新的办法。

例 2.2.

证明 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

解答： 令 $f(x) = \mathrm{e}^x$，注意到

$$\ln \sqrt[n]{n} = \frac{\ln n}{n} = \frac{2 \ln \sqrt{n}}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

所以 $\ln \sqrt[n]{n} \to 0$，因为 $f(x)$ 是连续函数，所以

$$\sqrt[n]{n} = f(\ln \sqrt[n]{n}) \to f(0) = 1.$$

作为练习，请同学们尝试用这种方法计算本次作业的 1.2.15(4).

2.3　关于求递推式数列的极限

回顾本次作业的 1.2.18 的 (2)-(5) 小问[3]。在这几小问中，我们都能够证明数列 $\{a_n\}$ 是单调的，从而得出收敛性。通过观察可以发现，它们有一个共同特征：递推式中 $a_{n+1} = f(a_n)$ 关于 a_n 是单调递增的，因此由

$$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - f(a_{n-1})$$

可以得出 $a_{n+1} - a_n$ 和 $a_n - a_{n-1}$ 一定同号。所以，如果 $\{a_n\}$ 的前 n 项是单调的，那么在前 $n+1$ 项也是单调的，进而可以得到整个数列的单调性。

[3] A 组有几位同学的方法是我以前没见过的，所以特地仔细研究了一下。我在作业解答中给出的方法来自宗语轩学长习题课讲义 1.3.5 小节，非常推荐大家阅读！

例 2.3.　习题 1.2.18(2)

$c \in (0,1)$，$a_1 = \frac{c}{2}$，$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛并求出极限。

解答:　易证 $0 \leqslant a_n \leqslant 1$，由递推式可以得到：

$$a_{n+1} - a_n = \frac{c + a_n^2}{2} - \frac{c + a_{n-1}^2}{2} = \frac{(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})}{2},$$

注意到 $a_1 = \frac{c}{2} \leqslant a_2$，归纳可证数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的，从而收敛。设其极限为 a，那么 a 满足

$$a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2},\ a \in [0,1].$$

最后得到 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

倘若 $f(a_n)$ 关于 a_n 是单调递减的，我们又该如何处理？此时我们考虑：

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= f(a_{n+1}) - f(a_{n-1}) \\ &= f(f(a_n)) - f(f(a_{n-2})), \end{aligned}$$

函数 $y = f(f(x))$ 是关于 x 单调递增的，于是我们发现，数列的奇数项子列与偶数项子列都是单调数列，并且单调性相反。接下来的目标是证明奇数项子列与偶数项子列都收敛并且极限相同，也就得到了原数列的极限。

例 2.4.

$a_1 = 1$，

$$a_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n} - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

证明 $\{a_n\}$ 收敛并求出极限。

解答:　记 $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$.

先证明：$\forall k \in \mathbb{N}_+$，$a_{2k} \leqslant 0 \leqslant a_{2k-1}$.

Step 1. $a_1 = 1$，$a_2 = e^{-1} - 1 < 0$，所以 $k = 1$ 时成立；

Step 2. 假设命题对 k 成立，那么

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \mathrm{e}^{-a_{2k}} - 1 \geqslant \mathrm{e}^0 - 1 = 0 \\ a_{2k+2} &= \mathrm{e}^{-a_{2k+1}} - 1 \leqslant \mathrm{e}^0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

所以命题对 $k+1$ 也成立。

再证明：$\{a_{2k}\}$ 单调递增，$\{a_{2k-1}\}$ 单调递减。即

$$a_{2k+2} - a_{2k} \geqslant 0,\ a_{2k+1} - a_{2k-1} \leqslant 0\ \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

Step 1. $k = 1$ 时，计算可知成立；

Step 2. 假设命题对 k 成立，那么

$$\begin{aligned} a_{2k+3} - a_{2k+1} &= f(a_{2k+2}) - f(a_{2k}) \leqslant 0, \\ a_{2k+4} - a_{2k+2} &= f(a_{2k+3}) - f(a_{2k+1}) \geqslant 0. \end{aligned}$$

所以命题对 $k+1$ 也成立。

综上可知，$\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 都收敛。设 $a_{2k} \to a$，那么

$$-\ln(a_{2k+2}+1) = a_{2k+1} = \mathrm{e}^{-a_{2k}} - 1$$

两边同取极限得到

$$-\ln(a+1) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \mathrm{e}^{-a} - 1,$$

分析 $g(a) = \mathrm{e}^{-a} + \ln(a+1) - 1$ 的单调性易得其只有一个零点 0，因此 $a = 0$，从而

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$$

根据习题 1.2.6 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

作为练习，请同学们尝试完成以下题目：

题目 1.

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛并求极限。

题目 2.

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛并求极限。