5.1.11

(1). 设 $F(x)$ 满足 $F'(x)=\sin x^2$，则由 N-L 公式可知

$$f(x)=F(x^2)-F(0) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=F'(x^2)\cdot 2x=2x\cdot\sin x^4.$$

(3). 设 $F(x)$ 满足 $F'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，则由 N-L 公式可知

$$f(x)=F(x^2)-F(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=F'(x^2)\cdot 2x-F'(x)=2x\mathrm{e}^{-x^4}-\mathrm{e}^{-x^2}.$$

5.1.15

(1).

$$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^\pi=2.$$

(3).

$$\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)\Big|_1^2=2\ln 2-1.$$

5.1.16 先求 $f(t)$ 的不定积分，可得

$$\int f(t)\mathrm{d}t=|t|+C, \quad t\in[-1,1].$$

因此

$$F(x)=|t|\Big|_{-1}^x=|x|-1,$$

$F(x)$ 在 $[-1,0)\cup(0,1]$ 上是可微的。

5.1.18

(1). 令

$$f(x)=\int_0^x \sin t^3\mathrm{d}t, \qquad g(x)=x^4,$$

则 $f(0)=g(0)=0$，且在 $x\to 0$ 时可用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^3\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}=\frac{1}{4}.$$

(2). 设

$$f(x)=\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\,\mathrm{d}t,\qquad g(x)=\sin^3 x,$$

则 $f(0)=g(0)=0$，对 x 求导得

$$f'(x)=\arcsin(\tan^2 x)\cdot\sec^2 x,\qquad g'(x)=3\sin^2 x\cos x.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(\tan^2 x)\sec^2 x}{3\sin^2 x\cos x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(\tan^2 x)}{\sin^2 x}.$$

又因为当 $u\to 0$ 时 $\arcsin u\sim u$，并且 $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(\tan^2 x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{\sin x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2=1,$$

从而原极限为 $\frac{1}{3}$。

(3). 记

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n\sqrt{1+(k/n)^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+(k/n)^2}}.$$

这是函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 在 $[0,1)$ 上的黎曼和（取左端点），因此

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}S_n&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta && \text{换元 } x=\tan\theta\\
&=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-s^2}\mathrm{d}s && \text{换元 } s=\sin\theta\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s\\
&=\left[-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\
&=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\ln(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

(4). 注意到

$$\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p,$$

这是函数 $f(x)=x^p\ (p>0)$ 在 $[0,1]$ 上的黎曼和，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.$$

5.1.19

(1). 因为 $0<a<b$，对 $x\in[a,b]$ 有 $x^2\geqslant a^2$，从而

$$0\leqslant\int_a^b \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b \mathrm{e}^{-na^2}\mathrm{d}x=(b-a)\mathrm{e}^{-na^2}.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x=0.$$

(2). 记

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

对任意 $\varepsilon\in(0,1)$，将积分拆分为

$$I_n=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

由于 $0\leqslant\dfrac{1}{1+x}\leqslant 1$，于是

$$0\leqslant\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{1-\varepsilon}x^n\,\mathrm{d}x=\frac{(1-\varepsilon)^{n+1}}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

且

$$0\leqslant\int_{1-\varepsilon}^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{1-\varepsilon}^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_{1-\varepsilon}^1=\ln 2-\ln(2-\varepsilon).$$

令 $n\to\infty$ 后再令 $\varepsilon\to0^+$，得

$$0\leqslant\limsup_{n\to\infty}I_n\leqslant\lim_{\varepsilon\to0^+}\big(\ln 2-\ln(2-\varepsilon)\big)=0,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=0.$$

(3). 设

$$I_n = \int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad a > 0.$$

由于 $|\sin x| \leqslant 1$，对 $x \in [n, n+a]$ 有 $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$，故

$$|I_n| \leqslant \int_n^{n+a} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+a} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n+a) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

5.1.21 令 $x = t + T$，则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$，

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

两边同时加上 $\int_a^T f(x)\mathrm{d}x$ 即得到题目结论。

5.1.22

(1). 因为 $|\cos x|$ 以 π 为周期，且在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上 $\cos x \geqslant 0$、在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上 $\cos x \leqslant 0$，故

$$\int_0^{2\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = 2\left(\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x\right) = 2\,(1+1) = 4.$$

(3). 令

$$I = \int_{-1}^{1} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

注意到 $\cos x$ 为偶函数，而

$$\ln\frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln\frac{1-x}{1+x} = -\ln\frac{1+x}{1-x},$$

因此 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 为奇函数，从而被积函数为奇函数。故

$$I = 0.$$

(5). 记

$$I=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $u=\mathrm{e}^{-x}$，则 $\mathrm{d}u=-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-u\,\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u$；当 $x=0$ 时 $u=1$，当 $x=\ln 2$ 时 $u=\frac{1}{2}$，故

$$I=\int_1^{1/2}\sqrt{1-u^2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)=\int_{1/2}^1\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

再令 $u=\sin\theta$，则 $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，$\mathrm{d}u=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，并且

$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=(\csc\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

因此

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\csc\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\left[\ln\tan\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=-\ln\tan\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$，故

$$I=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(7). 设

$$I=\int_0^1 x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

分部积分，取 $u=x^3$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=3x^2\mathrm{d}x$, $v=\mathrm{e}^x$，得

$$I=x^3\mathrm{e}^x\Big|_0^1-3\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-3\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

继续分部积分：

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x\Big|_0^1-2\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

故

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2,\qquad I=\mathrm{e}-3(\mathrm{e}-2)=6-2\mathrm{e}.$$

(9). 设

$$I=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x.$$

令 $t=\tan x$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/(1+t^2)$，并且当 $x:0\to\pi/4$ 时 $t:0\to 1$，故

$$I=\int_0^1\frac{t^{1/2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

再令 $t=u^2$，则 $\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u$，得

$$I=\int_0^1\frac{u}{1+u^4}\cdot 2u\,\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{2u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

注意到

$$1+u^4=(u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1),$$

并且可分解为

$$\frac{2u^2}{1+u^4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right).$$

因此

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}\,\mathrm{d}u-\int_0^1\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\,\mathrm{d}u\right).$$

其中

$$u^2-\sqrt{2}u+1=\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2},\qquad u^2+\sqrt{2}u+1=\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

计算可得（令 $w=u\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$）

$$\int\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln(u^2-\sqrt{2}u+1)+\arctan(\sqrt{2}u-1)+C,$$

$$\int\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln(u^2+\sqrt{2}u+1)-\arctan(\sqrt{2}u+1)+C.$$

故

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\arctan(\sqrt{2}u-1)+\arctan(\sqrt{2}u+1)\right]_0^1.$$

注意到 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$，故

$$\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1)=\frac{\pi}{2}.$$

又

$$\left.\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right|_{u=1}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2,\qquad \left.\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right|_{u=0}=1,$$

从而

$$\frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\ln(\sqrt{2}-1)=-\ln(\sqrt{2}+1).$$

综上

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

(11). 设

$$I=\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

被积函数为偶函数，故

$$I=2\int_{0}^{1} x^4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x=\sin\theta$，则 $\theta\in[0,\pi/2]$，$\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，并且 $\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$，于是

$$I=2\int_{0}^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

利用 $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$，得

$$\sin^4\theta\cos^2\theta=\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\cos 2\theta-\cos^2 2\theta+\cos^3 2\theta\right).$$

其中在 $[0,\pi/2]$ 上 $\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta=0$，$\int_0^{\pi/2}\cos^3 2\theta\,\mathrm{d}\theta=0$，且

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}.$$

故

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{32},$$

从而

$$I=2\cdot\frac{\pi}{32}=\frac{\pi}{16}.$$

(13). 设

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{|x|}\arctan(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\arctan(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{x}\arctan(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x.$$

在第一项中令 $x=-t$，则

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\arctan(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{t}\arctan(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t.$$

因此

$$I=\int_0^1\mathrm{e}^x\Big(\arctan(\mathrm{e}^x)+\arctan(\mathrm{e}^{-x})\Big)\,\mathrm{d}x.$$

又因为对 $x\geqslant 0$ 有 $\mathrm{e}^x>0$，且 $\arctan u+\arctan(1/u)=\frac{\pi}{2}$ $(u>0)$，故

$$\arctan(\mathrm{e}^x)+\arctan(\mathrm{e}^{-x})=\frac{\pi}{2},$$

从而

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}-1\right).$$

5.1.23 设

$$I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

作代换 $x=\pi-t$，则 $\sin(\pi-t)=\sin t$，从而

$$I=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}tf(\sin t)\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\,\mathrm{d}t-I.$$

故

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

又因为 $f(\sin x)$ 关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称，故

$$\int_0^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}f(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi/2}f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

取 $f(\sin x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$，则

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

令 $u=\cos x$，则 $\mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x$，得

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{0}\frac{-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^{1}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\arctan u\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

因此

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{4}.$$

5.1.25

(3). $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$。

$$\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+C.$$

$$\text{在}[0,1]\text{ 上：}\quad \bar{f}=\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Big(-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\Big)\Big|_0^1=1-\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

且 $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)\geqslant 0\ (x\in[0,1])$，故

$$\max f=f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}},\quad \min f=f(0)=0.$$

在 $[0,10^5]$ 上，

$$\bar{f}=\frac{1}{10^5}\int_0^{10^5}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{10^5}\Big(-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\Big)\Big|_0^{10^5}=\frac{1-(10^5+1)\mathrm{e}^{-10^5}}{10^5}.$$

又 $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$，故

$$\max f=f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}},\quad \min f=0.$$

5.1.27

(1). 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减。令

$$F(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x,\quad t\in(0,1].$$

因为 f 单调递减，故对任意 $x\in[0,t]$ 有 $f(x)\geqslant f(t)$，从而

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant tf(t)\quad\Rightarrow\quad F(t)\geqslant f(t).$$

由此

$$F'(t)=\frac{tf(t)-\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x}{t^2}\leqslant 0,$$

即 $F(t)$ 在 $(0,1]$ 上单调不增。于是对任意 $\alpha\in(0,1)$，

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=F(\alpha)\geqslant F(1)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若仅假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减且可积，则仍有对任意 $t\in(0,1]$，

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant tf(t),$$

因为在 $[0,t]$ 上 $f(x)\geqslant f(t)$ 成立（单调性即可）。于是同样可得

$$F'(t)=\frac{tf(t)-\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x}{t^2}\leqslant 0$$

（在可导点成立，从而推出 F 单调不增），进而得到同样结论

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.1.28

(1). 若 $f(a)=0$，则对任意 $x\in[a,b]$，由拉格朗日中值定理存在 ξ 介于 a 与 x 之间，使得

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),$$

从而

$$|f(x)|\leqslant|f'(\xi)|\,|x-a|\leqslant M(x-a).$$

因此

$$\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M(x-a)\,\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

(2). 若 $f(a)=f(b)=0$，同理由中值定理得对任意 $x\in[a,b]$，

$$|f(x)|\leqslant M(x-a),\qquad |f(x)|\leqslant M(b-x),$$

从而

$$|f(x)|\leqslant M\min\{x-a,\ b-x\}.$$

令 $L=b-a$，再令 $t=x-a\in[0,L]$，则

$$\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^L\min\{t,\ L-t\}\,\mathrm{d}t=2M\int_0^{L/2}t\,\mathrm{d}t=\frac{M}{4}L^2=\frac{M}{4}(b-a)^2.$$

5.1.31 由定义

$$g(x,y)=\int_0^x\big(f(t+y)-f(t)\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^x f(t+y)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

在第一项中令 $u=t+y$，则

$$\int_0^x f(t+y)\,\mathrm{d}t=\int_y^{x+y}f(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{x+y}f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u.$$

因此

$$g(x,y)=\int_0^{x+y}f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u,$$

右端关于 x,y 对称，故

$$g(x,y)=g(y,x).$$

5.3.1

(1). 抛物线 $y=x^2$ 在 $[-a,a]$ 上的弧长为

$$L=\int_{-a}^a\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^a\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^a\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

计算

$$\int\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\Big(2x\sqrt{1+4x^2}+\operatorname{arsinh}(2x)\Big)+C,$$

故

$$L=2\cdot\frac{1}{4}\Big(2a\sqrt{1+4a^2}+\operatorname{arsinh}(2a)\Big)=a\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(2a).$$

其中 $\operatorname{arsinh}(2a)=\ln\big(2a+\sqrt{1+4a^2}\big)$。

(2). 星形线

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t, \qquad 0 \leqslant t < 2\pi$$

的弧长为

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t.$$

其中

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad y' = 3a\sin^2 t\cos t,$$

故

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 3a|\sin t\cos t|.$$

利用对称性，

$$L = 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = 12a\cdot\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 6a.$$

(3). $r = a\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 的弧长（极坐标）为

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\,\mathrm{d}\theta.$$

计算

$$\int \sqrt{\theta^2 + 1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\Big(\theta\sqrt{\theta^2 + 1} + \operatorname{arsinh}\theta\Big) + C,$$

故

$$L = \frac{a}{2}\Big(2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \operatorname{arsinh}(2\pi)\Big).$$

其中

$$\operatorname{arsinh}(2\pi) = \ln\big(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\big).$$

5.3.2

(1). 双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 的面积为（极坐标面积公式）

$$S = \frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta.$$

一瓣对应 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$，故

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}\big(1 - (-1)\big) = \frac{a^2}{2}.$$

两瓣总面积

$$S = 2S_1 = a^2.$$

(2). 摆线

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

与 x 轴围成的面积为

$$S = \int y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} y(t)\,x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

其中 $x'(t) = 1 - \cos t$, $y(t) = 1 - \cos t$，故

$$S = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)\mathrm{d}t = 2\pi+0+\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = 2\pi+\pi = 3\pi.$$

(3). 由 $y = \mathrm{e}^x$ 与 $y = \mathrm{e}^{-x}$ 交于 $x = 0$，并与 $x = 1$ 围成区域面积为

$$S = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = \Big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\Big)\Big|_0^1 = (\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}) - (1+1) = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - 2.$$

5.3.3

(1). 设区域由 $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 x 轴围成。
绕 x 轴旋转一周：

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

绕 y 轴旋转一周：

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi\Big(-x\cos x + \sin x\Big)\Big|_0^{\pi} = 2\pi \cdot \pi = 2\pi^2.$$

5.3.5

(1). 圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 绕 x 轴旋转一周所得曲面为半径 r 的球面，其面积为

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x, \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

因为

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r}{y},$$

故

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} y \cdot \frac{r}{y}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-r}^{r} r\,\mathrm{d}x = 4\pi r^2.$$

5.4.1

(1).

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^a = \frac{1}{2}.$$

(3).

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_2^a\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_2^a=+\infty,$$

故发散。

(5).

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{\sin x+\cos x}{2}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a=\frac{1}{2}.$$

(7).

$$\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\ln x\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}(x\ln x-x)\big|_\varepsilon^1=-1.$$

(9). 注意 1 是被积函数的瑕点：

$$\int_0^1\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$$

我们先求不定积分，因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}},$$

因此分部积分得

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\ln x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_0^{1-\varepsilon}-\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x=\sin\theta$，$\theta\in(0,\pi/2)$，则

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\arcsin(1-\varepsilon)}\csc\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

取极限 $\varepsilon\to0^+$ 可得

$$\int_0^1\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=-\ln 2.$$

(11). 对 $n\in\mathbb{N}$，考虑

$$\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

分部积分得

$$\int_0^a x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-x^n\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^a+n\int_0^a x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

令 $a\to+\infty$，利用归纳法并注意到 $\lim_{a\to+\infty}a^n\mathrm{e}^{-a}=0$，可得

$$\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=n!.$$

5.4.3

(1).

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $u=\sqrt{x-1}$，则 $x=u^2+1$，$\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$，故

$$\int_1^a \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{a-1}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

取极限 $a\to+\infty$，得

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = 2\arctan u\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

(2). 考察

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x + \lim_{a\to+\infty}\int_1^a x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

前者收敛当且仅当 $\alpha<1$，后者收敛当且仅当 $\alpha>1$，因此不存在 α 使两部分同时收敛，故该积分对任意实数 α 均发散。

5.4.4

(1). 被积函数的瑕点只有 1，

$$\int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x + \int_1^4 \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x,$$

而且

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

那么考虑第一个瑕积分，

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to1^-}\int_{-1}^a \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to1^-}\left[\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]_{-1}^a = -\infty,$$

此积分发散，故原积分也发散。

(2). $x^{-1/3}$ 在 $[-1,1]$ 上的瑕点只有 0，那么

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^0 (-x)^{-1/3}\,\mathrm{d}(-x) + \int_0^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

还需证明 $\int_0^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x$ 存在：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_\varepsilon^1\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{3}{2}\left(1-\varepsilon^{2/3}\right)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$