5.1.3

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}.\\ -1 & ,x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

类似于习题 5.2.1，可验证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的上、下积分分别为 1 和 -1，因此不可积。但 $|f(x)|\equiv 1$ 在 $[0,1]$ 上可积。

5.1.4

(1). $f(c)>0$ 且 $f(x)$ 在 c 附近连续，则存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(x)-f(c)|<\frac{1}{2}f(c),\quad \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b].$$

因此

$$f(x)>\frac{1}{2}f(c)>0,\quad \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b].$$

由于 $c\in[a,b]$，$I=(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ 一定是非空区间，因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_I f(x)\mathrm{d}x>\int_I\frac{1}{2}f(c)\mathrm{d}x=m(I)\cdot\frac{1}{2}f(c)>0.$$

其中 $m(I)$ 代表区间 I 的长度。

(2). f 在 $[a,b]$ 上非负且不恒为零，则一定有 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0$，再利用上一小问的结论即可。

(3). 取 $[a,b]=[0,1]$，

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in[0,1).\\ 1 & ,x=1.\end{cases}$$

即为满足题目要求的例子。

5.1.5 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调递增，则一定有上界 $f(b)$ 和下界 $f(a)$，应用课本定理 5.10 即可。

5.1.6

(1). 利用辅助角公式，

$$|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2},$$

因此

$$\int_0^{2\pi}|a\sin x+b\cos x|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}x=2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

(2). 不难验证 $f(x)=x^m(1-x)^n$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为

$$f\left(\frac{m}{m+n}\right)=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

于是得证。

5.1.8 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上没有零点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负或者非正，不妨假设非负，于是由习题 5.1.4(1) 即可得证。

5.1.9

(1). 不妨 $g(x)$ 非负，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大、最小值分别为 M 和 m，那么

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$m\leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M,$$

由连续函数的介值定理可知存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

于是得证。

(2). 若 $g(x)$ 不满足非负/非正的条件，则可能不成立。考虑 $f(x)=g(x)=x$，

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=0,\quad \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

不可能存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)\cdot 0=\frac{1}{3}$.

5.2.1 设 $f(x)$ 是 Dirichlet 函数。我们熟知，任意两个不相等的实数之间一定存在有理数和无理数，因此任取区间 $[a,b]\subset[0,1]$，

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x)=1,\ \inf_{x\in[a,b]} f(x)=0.$$

因此，任意给定 $[0,1]$ 的分割 $T:0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$，

$$\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^n\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x)\right)\cdot(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=1}^n(x_n-x_{n-1})=1,$$

因此上积分 $=1$. 同理可证下积分 $=0$.

5.2.3 在任意闭区间 I 上，函数 $f(x)$ 的振幅可以表示为

$$\omega = \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)|,$$

而 $|f(x)|$ 的振幅可以表示为

$$\omega' = \sup_{x,y\in I} \big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| = \omega.$$

因此，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i' \cdot (x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \to 0 \text{ as } ||T|| \to 0,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i' \cdot (x_i - x_{i-1}) \to 0 \text{ as } ||T|| \to 0,$$

即 $|f(x)|$ 也可积。于是，

$$\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x = \lim_{||T||\to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) \geqslant \lim_{||T||\to 0} \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right|.$$

5.2.4 注意到

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{f(x)f(y)} \leqslant \frac{|f(x) - f(y)|}{c^2},$$

因此在任意闭区间 I 上，$\frac{1}{f(x)}$ 的振幅

$$\omega' = \sup_{x,y\in I} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| \leqslant \frac{1}{c^2} \cdot \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| = \frac{\omega}{c^2},$$

因此，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i' \cdot (x_i - x_{i-1}) \leqslant \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \to 0 \text{ as } ||T|| \to 0,$$

则 $\frac{1}{f(x)}$ 也可积。