1 基础题型分析

1.1 求极限

面对一道让你求极限的题目，可以出现的情况有：

1.1.1 利用极限定义

如果题目中明确出现“用定义证明...”这样的表述[1]，那么我们就只能利用 ε-δ 语言来证明。下面介绍常用的一些构造 $\delta(\varepsilon)$ 的放缩技巧。

例 1.1.

利用定义证明如下极限：

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin x=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}=0.$$

其中 $a\in(0,1)$，$n>1$.

证明： 涉及到三角函数，最简单的放缩就是其**有界性**：$|\sin x|\leqslant 1$. 希望 $|x\sin x|<\varepsilon$，则只需 $|x|<\varepsilon$.

涉及到对数和指数，**需要牢记：增长速度“对数 $<$ 任意幂次 $<$ 指数”**。我们可以利用泰勒展开将指数“缩小”为 x 的任意幂次，例如本题目中分子是 n 次，那就找 $n+1$ 次：

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ x>0.$$

希望 $\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}<\varepsilon$，只需

$$\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}<(n+1)!\cdot\frac{1}{x}<\varepsilon,$$

只需 $x>(n+1)!\cdot\varepsilon^{-1}$.

反过来，我们可以将对数“放大”为 x 的任意幂次，例如本题目中分母是 a 次，那就找 $\frac{a}{2}$ 次：

$$\ln x=\frac{2}{a}\ln x^{\frac{a}{2}}<\frac{2}{a}(x^{\frac{a}{2}}-1)<\frac{2}{a}x^{\frac{a}{2}}.$$

希望 $|\frac{\ln x}{x^a}|<\varepsilon$，只需 $\ln x>0$ 且

$$\frac{\ln x}{x^a}<\frac{2}{a}x^{-\frac{a}{2}}<\varepsilon,$$

只需

$$x>\max\left\{1,\left(\frac{2}{a\varepsilon}\right)^{\frac{2}{a}}\right\}.$$

1.1.2 处理不定式

不定式的情况有很多种，包括 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$、1^∞ 以及 $\infty-\infty$.

[1]即使题目中没有出现这样的表述，也依然可以用定义证明。

最基本的三种情况：$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$　此时，**洛必达法则通常是最有用、最简便的方法**。但盲目使用有可能会毫无作用、甚至越用越复杂：

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \to \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \to \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \to \cdots$$

我个人总结的简化原则是：**复杂的根式、指数先用等价无穷小来代换、多项式和对数尽量放在分子上，三角函数可以"被迫"放在分母上。**因为多项式和对数是越求导越简单的，而根式和指数是越求导越复杂的。至于三角函数放哪里都差不多，反正也消不掉，最好尽早用等价无穷小代换掉。

例 1.2.

求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln x+\mathrm{e}^x(\cos x-1)}{(\sqrt{1+x}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}.$$

证明： 这是一个 $\frac{0\cdot\infty+0}{0\cdot\infty}$ 型不定式。

$$\begin{aligned}
\mathrm{OE} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x(\cos x-1)}{(\sqrt{1+x}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln x}{(\sqrt{1+x}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\\
&\quad\text{（加减部分不能用等价无穷小代换，先拆成两部分）}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\ln x}{\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\\
&\quad\text{（用等价无穷小代换来简化式子）}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\\
&\quad\text{（前者现在是 }0/\infty\text{，直接得 0；后者可以用洛必达法则继续化简）}\\
&= 0+\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

可能涉及自然底数：1^∞　一般情况下，我们可以直接取对数转化成 $0\cdot\infty$. 个人认为，除非题目明确要求你只能用自然底数的定义，否则**能不去凑定义就别凑**，因为很容易算错、算漏系数和符号。最稳妥的方式，还是先取对数再求极限。

考虑

$$\lim_{x\to+\infty}(1+g(x))^{f(x)},$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，那么

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\ln(1+g(x))=\lim_{x\to+\infty}f(x)g(x),$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}(1+g(x))^{f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)g(x)},$$

例 1.3. 2022Mid.1.1

若

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{kx}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

求参数 k.

证明： $f(x)=kx$，$g(x)=-\frac{2}{x}$，所以原极限等于 e^{-2k}，于是 $k=\frac{1}{2}$.

可能会用到微分中值定理：$\infty-\infty$ 一般情况下，我们可以直接取指数简化成前三种情况。但有时趋于 ∞ 的两个部分具有相似的形式，则可以尝试使用同一个函数来表达，然后利用微分中值定理简化成一项。

例 1.4. 2023Mid.2.2/习题 1.2.15(2)

$0<k<1$，求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^k-n^k\right).$$

证明： 令 $f(x)=x^k$，那么 $f'(x)=kx^{k-1}$. 由微分中值定理可得，

$$(n+1)^k-n^k=k\cdot\xi_n^{k-1},\ \exists\xi_n\in(n,n+1),$$

当 $n\to+\infty$ 时，$\xi_n\to+\infty$，而 $\lim\limits_{\xi_n\to+\infty}\xi_n^{k-1}=0$，因此原极限 $=0$.

递推式数列极限 见第 3 周作业解答。

例 1.5. 2021Mid.7

设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$，且 $f(x)\in[a,b]$，满足：

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\ \forall x,y\in[a,b],\ x\neq y.$$

令 $x_1\in[a,b]$，归纳定义 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$，求证：
(1). $\{x_n\}$ 单调；
(2). $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 中一点 c，且 $f(c)=c$.
(3). c 是 $f(x)$ 唯一一个不动点。

证明： 由

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\ \forall x,y\in[a,b],\ x\neq y.$$

可知 $f(x)$ 连续。
(1). 当 $n\geqslant 2$ 时，若 $x_n>x_{n-1}$ 则

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\frac{x_n-x_{n-1}+f(x_n)-f(x_{n-1})}{2}\\&=\frac{|x_n-x_{n-1}|+f(x_n)-f(x_{n-1})}{2}\\&\geqslant\frac{|x_n-x_{n-1}|-|f(x_n)-f(x_{n-1})|}{2}>0.\end{aligned}$$

同理，若 $x_n < x_{n-1}$ 则

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-|x_n - x_{n-1}| + f(x_n) - f(x_{n-1})}{2} \leqslant \frac{-|x_n - x_{n-1}| + |f(x_n) - f(x_{n-1})|}{2} < 0.$$

因此数列单调。

(2). 注意到 $\forall x_n \in [a,b]$ 有界，因此 $\{x_n\}$ 收敛到 $c \in [a,b]$. 对 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ 两边取极限则得到 $f(c) = c$.

(3). 假设有不动点 $c_1 \neq c_2$，则 $|c_1 - c_2| = |f(c_1) - f(c_2)| < |c_1 - c_2|$，矛盾。

Stolz 定理的应用 Stolz 定理经常用在求和级数当中。除此以外，当题目给出的递推式 $f(x) = x$ 求不出解或者根本就无解时[2]，Stolz 定理可能会非常有用，例如习题 3.4.2.

例 1.6. 2024Mid.7 改

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0$，

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

证明：

(1). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$,

(2). $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - \sqrt{2n}) = 0$.

证明:

(1). 注意到 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} > 0$，所以 a_n 单调递增。假设 $a_n \to a$，则 $a = a + \frac{1}{a}$，矛盾。因此 $a_n \to +\infty$. 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{-2} + 2}{2} = 1.$$

(2).

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n - \sqrt{2n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 2n}{a_n + \sqrt{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 2n}{\sqrt{2n}(\frac{a_n}{\sqrt{2n}} + 1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 2n}{2\sqrt{2n}} && \text{(由 (1) 结论)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2 - 2}{2\sqrt{2}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} && \text{(由 Stolz 定理)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{2}a_n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2n}}{2\sqrt{2}\frac{a_n^2}{2n}} = 0.
\end{aligned}$$

[2]这往往意味着数列不收敛。

例 1.7.

已知 $a_n \to a$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

证明： 利用 Stolz 定理：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{a}{2}.$$

1.1.3　实数的完备性

实数的完备性的几个重要推论：

(1). 单调递增有上界数列一定收敛，且收敛到上确界（递减同理）；

(2). 有界数列都有收敛子列；

(3). 柯西列 = 收敛列。

1.1.4　证明极限不收敛

想要证明数列 $\{a_n\}$ 不收敛，可以采取的方法有：

1. 任取 a，验证 $a_n \to a$ 定义的否命题：

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N \text{ s.t. } |a_n - a| > \varepsilon_0.$$

2. 证明数列不是柯西列；
3. 选取两个收敛子列使其极限不相等，或者选取发散的子列（例如单调递增到无穷的子列）。

想要证明 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在，可以采取的方法有：

1. 证明函数不满足柯西收敛条件；
2. 选取数列 $a_n \to a$，并证明数列 $f(a_n)$ 不收敛；
3. 选取两个数列 $a_n \to a$ 和 $b_n \to a$，并证明 $f(a_n)$ 和 $f(b_n)$ 的极限不相等。

1.2　求导数

1.2.1　导数的定义

注意区分

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

和

$$f'(a+) = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

1.2.2　求导法则的应用

四则运算、链式法则。求高阶导数则考虑积法则的二项式展开：

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

1.2.3　隐函数求导

第一种是用参数方程所表示的隐函数，形如：

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases}$$

这种情况下，如果题目要求 y 对 x 的导数，则分别求出

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f'(t),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g'(t),$$

然后

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

最终结果要写成只跟 t 有关的形式即可（不必再用 x 或者 y 去表示 t）。

第二种是形如 $F(x,y)=0$ 所表示的隐函数，这种情况下，我们要利用链式法则来求导：

例 1.8.

已知 $\mathrm{e}^x \cdot \sin y + \ln x \cdot \cos y = 0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解答:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x \cdot \sin y) &= \mathrm{e}^x \cdot \sin y + \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin y \\
&= \mathrm{e}^x \cdot \sin y + \mathrm{e}^x \cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x \cdot \cos y) &= \frac{\cos y}{x} + \ln x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos y \\
&= \frac{\cos y}{x} - \ln x \sin y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{e}^x \cdot \sin y + \mathrm{e}^x \cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\cos y}{x} - \ln x \sin y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^x \cdot \sin y + \frac{\cos y}{x}}{\ln x \sin y - \mathrm{e}^x \cos y}.$$

1.2.4　导数的几何意义、单调性、凹凸性

求切线方程、求单调区间、求凹凸区间、求零点个数及其所在区间... 都是高考题，这里不多赘述。

2　证明题思路分析

总结了两个经典题型，供大家参考。

2.1 构造函数应用中值定理

先看一道例题：

例 2.1. 课本第三章综合习题 4 改

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $3f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证明： 令 $g(x)=\mathrm{e}^{3x}\cdot f(x)$，则 $g(a)=g(b)=0$，因此存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g'(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}(f'(\xi)+3f(\xi))=0,$$

即 $3f(\xi)+f'(\xi)=0$.

此构造的关键在于：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{kx}f(x)=\mathrm{e}^{kx}\left(kf(x)+f'(x)\right),$$

然后与题目给出的 $f'(\xi)+3f(\xi)$ 对比，则确定参数 $k=3$.

对于更一般的情形，我们令 $g(x)\mathrm{e}^{h(x)}f(x)$，根据

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{h(x)}f(x)=\mathrm{e}^{h(x)}\left(f(x)h'(x)+f'(x)\right),$$

与题目来确定 $h(x)$.

例 2.2. 课本第三章综合习题 6

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

证明： 设

$$g(x)=\mathrm{e}^{h(x)}f'(x),$$

则

$$g'(x)=\mathrm{e}^{h(x)}\left(f''(x)+f'(x)h'(x)\right),$$

我们希望的是：

$$f''(\xi)-\frac{2}{1-\xi}f'(\xi)=0,$$

于是令

$$h'(x)=-\frac{2}{1-\xi}\Rightarrow h(x)=2\ln 1-\xi+C,$$

即

$$g(x)=(1-x)^2f'(x).$$

由 $f(1)=f(0)$ 可得，存在 $a\in(0,1)$ 使得 $f'(a)=0$，于是 $g(a)=0$，同时 $g(1)=0$，因此存在 $\xi\in(a,1)$，使得 $g'(\xi)=0$.

例 2.3.　2022Mid.7/习题 3.3.17

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=f'(0)$、$f(1)=f'(1)$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $f(\xi)=f''(\xi)$.

解答:　由 $f(\xi)=f''(\xi)$ 联想到 $f(\xi)+f'(\xi)=f'(\xi)+f''(\xi)$，我们取

$$g(x)=\mathrm{e}^x(f(x)-f'(x)),$$

那么 $g(0)=g(1)=0$，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$g'(\xi)=\mathrm{e}^\xi(f(\xi)-f''(\xi))=0,$$

即 $f(\xi)=f''(\xi)$.

有时候这个方法并不奏效，例如下面这道题：

例 2.4.　课本第三章综合习题 8 改

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负可导，$f(0)=1$，$f(1)=\frac{1}{2}$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f^2(\xi)+f'(\xi)=0$.

这个时候，我们直接求解微分方程：

$$y^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

也就是

$$-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1}{y}=x+C,$$

然后，我们把常数 C 替换成 $g(x)$，得到

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x.$$

这就是我们想要的构造。
证明:　假设 $(0,1)$ 上 $f(x)>0$，令

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x,$$

那么 $g(0)=g(1)=1$，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$g'(\xi)=-\frac{f'(\xi)+f^2(\xi)}{f^2(\xi)}=0,$$

即 $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$.

现在考虑 $(0,1)$ 上 $f(x)$ 有零点 x_0 的情况，此时零点 x_0 必然是 $f(x)$ 的极小值，因此 $f'(x_0)=0$，从而取 $\xi=x_0$ 即可。

例 2.5. 2024Mid.8

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负可导，$f(0)=1$，$f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $f^3(\xi)+f'(\xi)=0$.

解答： 求解微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+f^3=0\Leftrightarrow -\frac{1}{f^3}\mathrm{d}f=\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{1}{2f^2}=x+C,$$

把常数 C 替换成 $g(x)$，构造：

$$g(x)=\frac{1}{2f^2(x)}-x,$$

其余过程与例 2.2 类似。

如果题目中出现的端点值比较复杂，则很可能要用 Cauthy 中值定理。

例 2.6. 习题 3.3.25

$b>a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，求证：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$2\xi(f(b)-f(a))=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

类似的题目还有作业中的习题 3.3.26.

2.2 用泰勒展开估计导数

例 2.7. 习题 3.6.8

$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且对于任意的 $x\in[0,2]$，有 $|f(x)|\leqslant 1$ 以及 $|f''(x)|\leqslant 1$. 证明：$|f'(x)|\leqslant 2$.

证明： 任取 $x\in(0,2)$，对 $f(0)$ 在 x 处做二阶展开：

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_0)}{2}x^2,\ \xi_0\in(0,x).$$

对 $f(2)$ 在 x 处做二阶展开：

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(2-x)^2,\ \xi_1\in(x,2).$$

于是

$$|f(2)-f(0)|=\left|2f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(2-x)^2-\frac{f''(\xi_0)}{2}x^2\right|\leqslant 2,$$

因此

$$
\begin{aligned}
|2f'(x)| &\leqslant 2+\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}(2-x)^2-\frac{f''(\xi_0)}{2}x^2\right| \\
&\leqslant 2+\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}(2-x)^2\right|+\left|\frac{f''(\xi_0)}{2}x^2\right| \\
&\leqslant 2+\frac{(2-x)^2+x^2}{2}\leqslant 2+2=4,\ x\in(0,2).
\end{aligned}
$$

即 $x\in(0,2)$ 时 $|f'(x)|\leqslant 2$，再由 $f'(x)$ 的连续性可得 $x\in[0,2]$ 也成立。

例 2.8.　2023Mid.7

f 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\leqslant 2$，证明：$|f'(x)|\leqslant 1$.

证明: 任取 $x\in(0,1)$，对 $f(0)$ 在 x 处做二阶展开：

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_0)}{2}x^2,\ \xi_0\in(0,x).$$

对 $f(1)$ 在 x 处做二阶展开：

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2,\ \xi_1\in(x,1).$$

因为 $f(0)=f(1)$，所以：

$$f'(x)=\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_0)}{2}x^2,$$

因此

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| &\leqslant \frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)(1-x)^2\right|+\frac{1}{2}\left|f''(\xi_0)x^2\right| \\
&\leqslant (1-x)^2+x^2\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

注意此式是对 $x\in(0,1)$ 成立的，利用 $f'(x)$ 连续性可知端点值也不超过 1.

例 2.9.　2018Mid.7

非常值函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导数，且满足 $|f''(x)|\leqslant|f'(x)|$，求证：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调。

证明: 假设 $f(x)$ 不严格单调，即存在 $x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$，不妨 $f(0)=f(1)$.
同理于上一题，我们得到

$$f'(x)=\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_0)}{2}x^2,\ \xi_0\in(0,x),\xi_1\in(x,1).$$

因此

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| &\leqslant \frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)(1-x)^2\right| + \frac{1}{2}\left|f''(\xi_0)x^2\right| \\
&\leqslant \frac{|f''(\xi_1)|}{2}(1-x)^2 + \frac{|f''(\xi_0)|}{2}x^2 \\
&\leqslant \frac{|f'(\xi_1)|}{2}(1-x)^2 + \frac{|f'(\xi_0)|}{2}x^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|\right)\cdot\left((1-x)^2+x^2\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|\right), \forall x\in(0,1).
\end{aligned}
$$

由于 $|f'(x)|$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数，所以存在 $x_0\in[0,1]$ 使得

$$|f'(x_0)| = \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|,$$

如果 $x_0\in(0,1)$，则得到

$$\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| = |f'(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|,$$

从而

$$\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| = 0.$$

如果 $x_0\in\{0,1\}$，则根据 $|f'(x)|$ 的连续性，$\forall\varepsilon>0$，存在 $a\in(0,1)$ 使得 $|f'(x_0)|\leqslant|f'(a)|+\varepsilon$，从而

$$\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| = |f'(x_0)| \leqslant |f'(a)|+\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|+\varepsilon,$$

那么由 $\varepsilon>0$ 的任意性可知

$$\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| = 0.$$

综上所述，我们得到 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上恒为 0.

最后，我们希望 $f'(x)$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上恒为 0. 设 $t\in(1,\frac{3}{2}]$，那么

$$f(t) = f(1) + f'(t)(t-1) + \frac{f''(\zeta_0)}{2}(t-1)^2,\ \zeta_0\in(1,t).$$

$$f(1) = f(t) + \frac{f''(\zeta_1)}{2}(t-1)^2,\ \zeta_1\in(1,t).$$

于是

$$\frac{f''(\zeta_0)+f''(\zeta_1)}{2}(t-1)^2 + f'(t)(t-1) = 0,$$

即

$$\frac{f''(\zeta_0)+f''(\zeta_1)}{2} = -\frac{f'(t)}{t-1},$$

根据导函数的介值性，$\exists\zeta$ 介于 ζ_1,ζ_2 之间，使得

$$\frac{|f'(t)|}{t-1}=\left|\frac{f''(\zeta_0)+f''(\zeta_1)}{2}\right|=|f''(\zeta)|\leqslant|f'(\zeta)|\leqslant\sup_{x\in[1,t]}|f'(x)|.$$

因为 $t\leqslant\frac{3}{2}$，那么

$$2|f'(t)|\leqslant\frac{|f'(t)|}{t-1}\leqslant\sup_{x\in[1,t]}|f'(x)|,$$

从而 $f'(t)=0$，从而

$$f'(x)=0,\ \forall x\in[1,\frac{3}{2}].$$

至此，我们成功地把 $[0,1]$ 延长到原来的 1.5 倍，进而可以延拓到整个 $[0,+\infty)$，另一侧的延拓过程则完全同理。

> 这个方法思路比较直观，但最繁琐，尤其是延拓到 $\mathbb{R}$ 上那一步。

证明: （构造单调函数）假设 $f'(x)$ 有零点 $f'(x_0)=0$，我们来证明 $f'(x)$ 恒等于 0.

设 $g(x)=\mathrm{e}^{-2x}(f'(x))^2$，那么

$$g'(x)=\mathrm{e}^{-2x}(2f'(x)f''(x)-2(f'(x))^2)=2\mathrm{e}^{-2x}f'(x)(f''(x)-f'(x)),$$

由于 $|f''(x)|\leqslant|f'(x)|$，所以 $f''(x)-f'(x)$ 的符号由 $f'(x)$ 决定：

$$\begin{cases}f''(x)-f'(x)\geqslant0, & f'(x)\leqslant0\\ f''(x)-f'(x)\leqslant0, & f'(x)\geqslant0\end{cases}$$

因此 $g'(x)\leqslant0$. 那么 $g(x_0)=0$，而 $g(x)\geqslant0$，所以那么 $g(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 恒等于 0，即 $f'(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上恒等于 0.

另一方面，设 $h(x)=\mathrm{e}^{2x}(f'(x))^2$，则 $h'(x)=2\mathrm{e}^{2x}f'(x)(f''(x)+f'(x))\geqslant0$，因此 $h(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上恒等于 0，即 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上恒等于 0.

综上所述，如果 $f'(x)$ 有零点，则 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒等于 0，因此 $f(x)$ 是常函数；如果 $f'(x)$ 无零点，则由连续性可知 $f'(x)$ 恒正或恒负，从而 $f(x)$ 单调。

> 这个构造挺巧妙，同学们不妨积累一下。

证明: （应用中值定理）假设存在 $x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$，那么存在 c 使得 $f'(c)=0$，从而 $f''(c)=0$.

对于 $\forall x\in\mathbb{R}$，

$$f'(x)=f'(x)-f'(c)=f''(\xi_1)(x-c),\ \xi_1\text{介于 } c,x \text{ 之间}$$

因此

$$|f'(x)|=|f''(\xi_1)|\cdot|x-c|\leqslant|f'(\xi_1)|\cdot|x-c|,$$

对于 ξ_1，则有

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_1)-f'(a)=f''(\xi_2)(x-c),\ \exists\xi_2\text{介于 } c,\xi_1 \text{ 之间}$$

因此

$$|f'(x)| \leqslant |f'(\xi_1)| \cdot |x-c| = |f''(\xi_2)| \cdot |x-c|^2,$$

以此类推，可以得到

$$|f'(x)| \leqslant |f''(\xi_n)| \cdot |x-c|^n \leqslant |f'(\xi_n)| \cdot |x-c|^n,$$

$|f'(x)|$ 连续，因此在有限区间上有界。于是当 $|x-c|<1$ 时，一定有 $|f'(x)|=0$，即我们证明了 $(c-1,c+1)$ 上 $f'(x)=0$，在这个区间上选择新的点作为 c 继续延拓，最终可得 $f'(x)=0$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上成立。

这个方法由同学提供:)

例 2.10. 课本第三章综合习题 18

$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：存在 $\xi \in (-1,1)$ 使得 $f'''(\xi)=3$.

证明: 对 $f(0)$ 在 $x=1$ 处三阶展开：

$$\begin{aligned} f(0) &= f(1) - f'(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_1)}{6} \\ &= 1 + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_1)}{6},\ \xi_1 \in (0,1). \end{aligned}$$

对 $f(0)$ 在 $x=-1$ 处三阶展开：

$$\begin{aligned} f(0) &= f(-1) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_2)}{6} \\ &= \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_2)}{6},\ \xi_2 \in (-1,0). \end{aligned}$$

对比可得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6} = 1,$$

根据导函数的介值性，可知存在 $\xi \in [\xi_2,\xi_1]$ 使得

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2} = 3.$$