1 第 3 周作业解答

已经在课程群以及课程主页中发布：
http://home.ustc.edu.cn/~fa1247/course/solution_week3.pdf

2 第 4-5 周作业解答

1.3.2

(1). $\lim\limits_{x\to 1}(x^5-5x+2+\frac{1}{x})=1-5+2+1=-1$.
(2). $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=n$.
(3). $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$.
(4). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3+6/x)^{70}(8-5/x)^{20}}{(5-1/x)^{90}}=\frac{3^{70}\cdot 8^{20}}{5^{90}}$.

1.3.3

(1). 令 $\varepsilon=1$，$\forall\delta>0$，令 $k=\lceil\frac{\delta}{2\pi}\rceil$，那么

$$x_1=2k\pi>\delta,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi>\delta,$$

于是 $|\sin x_1-\sin x_2|=1\geqslant\varepsilon$，由 Cauthy 收敛准则可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在。
(2). 令 $\varepsilon=1$，$\forall\delta>0$，取 $x_1=\frac{1}{2}\delta$、$x_2=-\frac{1}{2}\delta$，则 $x_1,x_2\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 并且

$$\left|\frac{|x_1|}{x_1}-\frac{|x_2|}{x_2}\right|=1\geqslant\varepsilon,$$

由 Cauthy 收敛准则可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在。

1.3.5

(1). 取 $\delta\in(0,1)$，则 $x\in(0,\delta)$ 时 $[x]=0$，$x\in(-\delta,0)$ 时 $[x]=-1$，因此

$$\lim_{x\to 0+}[x]=0\neq\lim_{x\to 0-}[x]=-1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}[x]$ 不存在。
(2). 注意 $\operatorname{sgn}(x)=\frac{|x|}{x}$，在 1.3.3(2) 已经讨论过。
(3). $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}2^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(1+x^2)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}=1$.
(4). 令 $\varepsilon=1$，$\forall\delta>0$，令 $k=\lceil\frac{1}{2\pi\delta}\rceil$，那么

$$x_1=\frac{1}{2k\pi},\ x_2=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}},$$

于是 $x_1,x_2\in(0,\delta)$，并且

$$|f(x_1)-f(x_2)|=1\geqslant\varepsilon,$$

由 Cauthy 收敛准则可知 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 也不存在。

1.3.7　方法一：我们利用以下不等式：$\forall \delta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\frac{\sin\delta}{\delta}\cdot x \leqslant \sin x \leqslant x,\ x\in[0,\delta],$$

从而可以得到：

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2} &\leqslant \frac{\alpha}{n^2}+\cdots+\frac{n\alpha}{n^2}=\frac{n+1}{2n}\alpha,\\
\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2} &\geqslant \frac{\sin\frac{n\alpha}{n^2}}{\frac{n\alpha}{n^2}}\left(\frac{\alpha}{n^2}+\cdots+\frac{n\alpha}{n^2}\right)\\
&=\frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha}{n}}\cdot\frac{n+1}{2n}\alpha.
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{\alpha}{n}\to 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha}{n}}\cdot\frac{n+1}{2n}\alpha=\frac{\alpha}{2}.$$

所以原极限 $=\frac{\alpha}{2}$.

方法二：利用积化和差：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sin kx &= \frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx}{\sin\frac{x}{2}}\\
&=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k-1}{2}x-\cos\frac{2k+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\\
&=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{\alpha}{2n}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\frac{\alpha}{2n}}{\frac{\alpha}{2n^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\alpha}{2n}\\
&=\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

1.3.8 验证定义即可：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } |f(x)-l|<\varepsilon, \forall x\in(-\infty,-\delta)\cup(\delta,+\infty) \\
&\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } |f(\frac{1}{x})-l|<\varepsilon, \forall x\in(-\delta^{-1},0)\cup(0,\delta^{-1}) \\
&\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } |f(\frac{1}{x})-l|<\varepsilon, \forall x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta) \\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(\frac{1}{x}) = l.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } |f(x)-l|<\varepsilon, \forall x\in(\delta,+\infty) \\
&\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } |f(\frac{1}{x})-l|<\varepsilon, \forall x\in(0,\delta^{-1}) \\
&\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } |f(\frac{1}{x})-l|<\varepsilon, \forall x\in(0,\delta) \\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to 0+} f(\frac{1}{x}) = l.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } |f(x)-l|<\varepsilon, \forall x\in(-\infty,-\delta) \\
&\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } |f(\frac{1}{x})-l|<\varepsilon, \forall x\in(-\delta^{-1},0) \\
&\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } |f(\frac{1}{x})-l|<\varepsilon, \forall x\in(-\delta,0) \\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to 0-} f(\frac{1}{x}) = l.
\end{aligned}$$

1.3.9

(1). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$.

(2). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x\cdot x}{x^2} = 4$.

(3).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}}{2x-1}\right)^x \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\left(1+\frac{3}{2x-1}\right)^x \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\cdot\left(1+\frac{3}{2x-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0\cdot e^{\frac{3}{2}}\cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

(4).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^2\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)\\ &= e^2\cdot 1 = e^2.\end{aligned}$$

1.3.12 考虑数列 $a_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，则 $y(a_n) = a_n \to +\infty$，所以 $y = x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 无界。

考虑数列 $b_n = 2n\pi$，则 $b_n \to +\infty$，但 $y(b_n) = 0$，所以 $x \to +\infty$ 时 y 不是无穷大量。

1.3.13 考虑数列

$$a_n = \frac{1}{2n\pi},$$

则 $a_n \in (0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} y(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$，所以 y 在 $(0,1)$ 上无界。

考虑数列

$$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},$$

则 $b_n \in (0,1)$ 且 $b_n \searrow 0$，$y(b_n) = 0$，所以 $x \to 0^+$ 时 y 不是无穷大量。

3 作业反馈与补充

3.1 关于上极限与下极限

课本定理 1.7 告诉我们：如果 $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. 但 $a_n \geqslant b_n$ 并不意味着 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$，这是因为数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 不一定收敛。同学们在答题时要注意**不要在没有证明极限存在的前提下**写出类似于“$a_n \geqslant b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$”这样的表述。

如果想要在不知道极限存在性的前提下分析数列的极限行为，就需要数列的上/下极限来作为媒介——无论数列是否收敛，上/下极限都是存在的。Bolzano-Weierstrass 定理告诉我们，如果实数列 $\{a_n\}$ 有界，那么一定存在收敛的子列。倘若 $\{a_n\}$ 无上界，那么我们可以按照以下步骤取出发散到 $+\infty$ 的子列：

1. 存在 $N_1 \in \mathbb{N}_+$，使得 $\forall n > N_1$ 都有 $a_n > 1$，令 $b_1 = a_{N_1+1}$；
2. 存在 $N_2 \in \mathbb{N}_+$，使得 $\forall n > N_2$ 都有 $a_n > 2$，不妨设 $N_2 \geqslant N_1 + 1$，否则我们取 $\tilde{N}_2 = \max\{N_2, N_1+1\}$，最后令 $b_2 = a_{N_2+1}$；
3. 存在 $N_3 \in \mathbb{N}_+$，使得 $\forall n > N_3$ 都有 $a_n > 3$，不妨设 $N_3 \geqslant N_2 + 1$，否则我们取 $\tilde{N}_3 = \max\{N_3, N_2+1\}$，最后令 $b_3 = a_{N_3+1}$；
4. 以此类推，可得到子列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n > n$，从而 $b_n \to +\infty$.

同理，倘若 $\{a_n\}$ 无下界，那么可以取出发散到 $-\infty$ 的子列。因此，我们可以得到：

推论 1. 任意实数列 $\{a_n\}$，

$$M_{\{a_n\}} = \{\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ s.t. } \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell\} \neq \varnothing.$$

定义. 对于实数列 $\{a_n\}$，定义

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup M_{\{a_n\}},\ \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf M_{\{a_n\}}.$$

分别称为数列 $\{a_n\}$ 的上极限、下极限[1]。

为了简化表达，我们接下来将“发散到正/负无穷”的数列称作“收敛到正/负无穷”的数列，即称数列 $\{a_n\}$ 收敛时，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

根据定义，我们容易得到以下推论（留作练习）：

推论 2. 对于实数列 $\{a_n\}$，总有 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

推论 3. 对于实数列 $\{a_n\}$，总有 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. 等号成立当且仅当 $\{a_n\}$ 收敛。

推论 4. 实数列 $\{a_n\}$ 若无上界，则 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$；若无下界，则 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. 若 $a < a_n < b$，则

$$a \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant b.$$

性质 1. 对于实数列 $\{a_n\}$，

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k,\ \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k.$$

证明： 设 $b_n = \sup\limits_{k\geqslant n} a_k$，则 b_n 单调非增。

(1). 如果 $b_n \to +\infty$，则 $\forall b_n = +\infty$，所以 $\{a_n\}$ 无上界 $\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(2). 如果 $b_n \to -\infty$，假设有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a > -\infty,$$

则存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得 $\forall k > N$ 都有 $a_{n_k} > a-1$，也就是说 $\{a_n\}$ 有无穷多项 $> a-1$，从而

$$b_n = \sup_{k\geqslant n} a_k > a-1,\ \forall n.$$

这与 $\{b_n\}$ 无下界矛盾。所以 $\{a_n\}$ 的任何收敛子列都收敛到 $-\infty \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(3). 如果 $b_n \to \ell \in \mathbb{R}$，假设有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a > \ell,$$

[1]也有其他教材记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

那么根据极限的保号性，存在 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得 $k>N$ 时 $\forall a_{n_k}>\frac{a+\ell}{2}$，即 $\{a_n\}$ 有无穷多项 $>\frac{a+\ell}{2}$，从而

$$b_n=\sup_{k\geqslant n}a_k>\frac{a+\ell}{2},\ \forall n.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}b_n\geqslant\frac{a+\ell}{2}>\ell,$$

矛盾。因此可得 $\{a_n\}$ 任意收敛子列极限都 $\leqslant\ell$，从而

$$\limsup_{n\to\infty}a_n\leqslant\ell=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}a_k.$$

另一方面，我们需要证明：$\forall\varepsilon>0$，存在子列 $a_{n_k}\to\ell_0\geqslant\ell-\varepsilon$. 由 $b_n\searrow\ell$ 可知，存在 $N\in\mathbb{N}_+$

$$b_n=\sup_{k\geqslant n}a_k\in[\ell,\ell+1),\ \forall n>N.$$

按照以下步骤取出子列：
Step 1. 存在 $n_1>N$ 使得 $a_{n_1}\in[\ell-\varepsilon,\ell+1)$;
Step 2. $b_{n_1+1}=\sup\limits_{k\geqslant n_1+1}a_k\in[\ell,\ell+1)$，所以存在 $n_2\geqslant n_1+1$ 使得 $a_{n_2}\in[\ell-\varepsilon,\ell+1)$;
Step 3. $b_{n_2+1}=\sup\limits_{k\geqslant n_2+1}a_k\in[\ell,\ell+1)$，所以存在 $n_3\geqslant n_2+1$ 使得 $a_{n_3}\in[\ell-\varepsilon,\ell+1)$;
Step 4. 以此类推，得到子列 $\{a_{n_k}\}\subset[\ell-\varepsilon,\ell+1)$.
根据 Bolzano-Weierstrass 定理可知，$\{a_{n_k}\}$ 存在收敛子列 $\{a_{n_{k_t}}\}$，并且 $\lim\limits_{t\to\infty}a_{n_{k_t}}\geqslant\ell-\varepsilon$，这就是我们想要构造的 $\{a_n\}$ 子列。
至此 $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant n}a_k$ 得证。对于下极限，只需注意到

$$\liminf_{n\to\infty}a_n=-\limsup_{n\to\infty}(-a_n)=-\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}(-a_k)=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}(a_k)$$

即可。

推论 5. 设实数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_n\leqslant b_n$，则

$$\limsup_{n\to\infty}a_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}b_n,\ \liminf_{n\to\infty}a_n\leqslant\liminf_{n\to\infty}b_n.$$

例 3.1.

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

解答: 任取 $\varepsilon>0$，存在 N 使得 $n>N$ 时 $a_n<a+\varepsilon$，于是

$$\begin{aligned}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}&=\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}\\&<\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}+\frac{n-N}{n}(a+\varepsilon).\end{aligned}$$

两边同取上极限，可得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}+\frac{n-N}{n}(a+\varepsilon)\right)=a+\varepsilon.$$

由于 ε 可以任意小，所以一定有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\leqslant a.$$

同理可得 $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geqslant a$，从而命题得证。

作为练习，请同学们尝试用上、下极限的知识完成课本第 53 页第 11 题：

题目 1.

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

注：本节内容不在考试范围内，大家了解即可，考试时**可以使用**习题课讲义中助教已经为大家证明过的各种结论，但一定要保证叙述的严谨性！

3.2 一些三角函数的公式

本次作业中的 1.3.7 不能直接把每个 $\sin\frac{k\cdot\alpha}{n^2}$ 替换成 $\frac{k\cdot\alpha}{n^2}$，而是需要一些其他手段让它转化为若干无穷小量的乘积形式，因为我们只能对无穷小/大量的因子进行等价替换，而用加、减号连接的式子里，就不能实行等价替换。详情可见课本第 49 页。

和差化积：

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ \sin\alpha-\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\ \cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ \cos\alpha-\cos\beta&=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{aligned}$$

积化和差：

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta&=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},\\ \sin\alpha\cos\beta&=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},\\ \cos\alpha\cos\beta&=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}.\end{aligned}$$

正弦求和：

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

余弦求和：

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

余弦求积：

$$\prod_{k=0}^{n}\cos 2^k\theta=\frac{\sin 2^{n+1}\theta}{2^{n+1}\sin\theta}.$$