

第一次习题课

9.26

题目 1. 1.1.2.

求证：两个不同的有理数之间有无理数。

解答：对于给定的两个有理数 $a < b$ ，我们任取一个 $(0, 1)$ 上的无理数 x ，那么 $a + x(b - a)$ 就是一个介于 a 和 b 之间的无理数。

题目 2. 1.1.3.

求证： $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 以及 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 都是无理数。

解答：对于 $\sqrt{2}$ ，假设它是有理数，那么存在互质的两个正整数 p 和 q 使得

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2 = 2q^2,$$

等式右侧是一个偶数，所以 p 一定也是个偶数。设 $p = 2k$ ， k 也是正整数，那么

$$2k^2 = q^2,$$

等式左侧是一个偶数， q 也一定是个偶数，这与 p, q 互质相矛盾。同理，我们也可以证明 $\sqrt{3}$ 是无理数。

对于 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数的证明，我们这里给出两种方法：

(1). 假设 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是有理数，那么存在互质的两个正整数 p 和 q 使得

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

从而

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \frac{p}{q} - \sqrt{2} \\ 3 &= \frac{p^2}{q^2} + 2 - 2\sqrt{2}\frac{p}{q} \\ \sqrt{2} &= \frac{q}{2p} \left(\frac{p^2}{q^2} - 1 \right)\end{aligned}$$

右式是一个有理数，但 $\sqrt{2}$ 是无理数，矛盾。

- (2). 令 $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, 那么 $a + b = 2\sqrt{3}$ 是一个无理数, 因此 a 和 b 中至少有一个是无理数 (否则它们的和当然也是有理数)。如果 a 和 b 中一个是有理数、另一个是无理数, 那么它们的积 ab 也应当是无理数, 然而 $ab = 1$, 所以只能 a 和 b 都是无理数。

注: 好多同学都写 “ $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ 是无理数, 所以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数”, 但没有证明 $\sqrt{6}$ 是无理数, 补一句 “和 $\sqrt{2}$ 同理” 就可以了。

题目 3. 1.1.6.

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 有相同的符号, 且都大于 -1 , 证明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

解答: 我们用数学归纳法。对于 $n = 1$ 的情况, 不等式显然成立; 设不等式对于 $n \leq k$ 的情况成立, $k \geq 2$, 那么考虑 $n = k + 1$ 的情况:

$$\begin{aligned} & (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ & \geq (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ & = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ & = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + (a_{k+1}a_1 + a_{k+1}a_2 + \cdots + a_{k+1}a_k) \end{aligned}$$

由于这些实数都有相同的符号, 所以 $a_{k+1}a_1 + a_{k+1}a_2 + \cdots + a_{k+1}a_k \geq 0$. 因此

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}.$$

于是 $n = k + 1$ 的情况也成立。

综上可知不等式对所有的 $n \in \mathbb{N}_+$ 都成立。

题目 4. 1.1.7.

设 a, b 是实数, $|a| < 1$, $|b| < 1$, 证明:

$$\left| \frac{a + b}{1 + ab} \right| < 1.$$

解答: 不等式两边都是正数, 所以只需证明

$$\left(\frac{a + b}{1 + ab} \right)^2 < 1,$$

即证

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2b^2 + 2ab + 1} < 1,$$

即证

$$a^2 + b^2 < a^2b^2 + 1,$$

即证

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) > 0.$$

根据题设可知, $a^2 - 1$ 和 $b^2 - 1$ 均小于 0, 所以不等式得证。

题目 5. 1.2.1.

过程比较繁琐，这里就不敲了。大家注意一下题干要求用定义证明就好，别考试的时候写错了。

题目 6. 1.2.2.

证明：若数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ 存在 } N \in \mathbb{N}_+, \text{ 使得当 } n > N \text{ 时, } |a_n - a| < M\varepsilon.$$

则 $a_n \rightarrow a$.

解答：假设不然，那么

$$\text{存在 } \varepsilon_0 > 0, \text{ 使得对于任意的 } N \in \mathbb{N}_+, \text{ 存在 } n_0 > N \text{ 使得 } |a_{n_0} - a| > \varepsilon_0. \quad (6.1)$$

令 $\varepsilon = M^{-1}\varepsilon_0$ ，根据题设可知，存在 $N \in \mathbb{N}_+$ ，使得当 $n > N$ 时， $|a_n - a| < M\varepsilon = \varepsilon_0$ ，这与 (6.1) 矛盾。

注：取 $\varepsilon = M^{-1}\varepsilon_0$ 之后顺着定义来证也是可以的，这里用反证法是希望大家能掌握极限收敛的否命题该怎么表达。

题目 7. 1.2.3.

证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

解答：这两个极限用定义写出来，会发现是一模一样的：

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ 存在 } N \in \mathbb{N}_+, \text{ 使得 } n > N \text{ 时, 总有 } |a_n - a| < \varepsilon.$$

题目 8. 1.2.4.

- (1). 证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ ，反之不一定成立。
(2). 证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

解答：

(1).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } |a_n - a| < \varepsilon \text{ for all } n > N \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon \text{ for all } n > N \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|. \end{aligned}$$

反之不一定成立，例如 $a_n = (-1)^n$.

(2).

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } |a_n| < \varepsilon \text{ for all } n > N \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.\end{aligned}$$

题目 9. 1.2.5.

证明：如果 $a_n \rightarrow 0$, $|b_n| \leq M$, 那么 $a_n b_n \rightarrow 0$.

解答： $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $n > N$ 时, 总有 $|a_n| < \varepsilon$, 从而 $|a_n b_n| < M\varepsilon$, 此处 M 是常数, 根据题目 6, 可知 $a_n b_n \rightarrow 0$.

题目 10. 1.2.9.

$a_n \neq 0$, $a_n \rightarrow a$, 证明或否定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

解答： 不一定成立, 反例: $a_n = 2^{-n}$.

思考：如果 $a \neq 0$, 那么命题是否成立? 答案是肯定的, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1.$$

题目 11. 1.2.10.

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$,

- (1). 如果 $a_n b_n \rightarrow 0$, 是否有 $a_n \rightarrow 0$ 或者 $b_n \rightarrow 0$?
- (2). 若进一步假设 $a_n \rightarrow a$, 回答同样的问题。

解答:

(1). 此时 “ $a_n \rightarrow 0$ 或者 $b_n \rightarrow 0$ ” 这一命题不成立。反例:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 是奇数;} \\ 1, & n \text{ 是偶数} \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 是奇数;} \\ 0, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

(2). 此时 “ $a_n \rightarrow 0$ 或者 $b_n \rightarrow 0$ ” 这一命题成立。只需证明, 如果 $a_n \rightarrow a \neq 0$, 则 $b_n \rightarrow 0$. 因为 $a_n \rightarrow a \neq 0$, 取 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}|a|$,

$$\begin{aligned}\text{对于 } \varepsilon_1, \text{ 存在 } N_1 \in \mathbb{N}_+, \text{ 使得 } n > N_1 \text{ 时, 总有 } |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}|a| \\ \Rightarrow |a_n| > \frac{1}{2}|a|.\end{aligned}\tag{11.1}$$

又因为 $a_n b_n \rightarrow 0$,

$$\text{对于 } \varepsilon_0, \text{ 存在 } N_2 \in \mathbb{N}_+, \text{ 使得 } n > N_2 \text{ 时, 总有 } |a_n b_n| < \varepsilon_0.\tag{11.2}$$

现在, 我们令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 那么 $n > N$ 时, 根据 (11.1) 和 (11.2) 有

$$\frac{1}{2}|a||b_n| < |a_nb_n| < \varepsilon_0$$

从而 $|b_n| < \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon_0$, 此处 $\frac{2}{|a|}$ 是常数, 根据题目 6, 可知 $b_n \rightarrow 0$.

注: 其实 (2) 利用极限的四则运算更简单: $a \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{0}{a} = 0.$$

题目 12. 1.2.11.

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$,

- (1). 如果 $\{a_n\}$ 收敛, $\{b_n\}$ 发散, 那么 $\{a_n \pm b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的收敛性如何?
- (2). 如果两个数列都发散, 回答同样的问题。

解答:

- (1). $\{a_nb_n\}$ 可能收敛也可能发散:

(I). $a_n = 2^{-n}$, $b_n = (-1)^n \Rightarrow a_nb_n \rightarrow 0$;

(II). $a_n = 2^{-n}$, $b_n = 2^{2n} \Rightarrow a_nb_n = 2^n$ 发散。

$\{a_n \pm b_n\}$ 一定发散, 否则, $b_n = (a_n + b_n) - a_n$ 或者 $b_n = a_n - (a_n - b_n)$ 是收敛的, 矛盾。

- (2). $\{a_nb_n\}$ 可能收敛也可能发散:

(I). $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n \Rightarrow a_nb_n \rightarrow 1$;

(II). $a_n = 2^n$, $b_n = 2^n \Rightarrow a_nb_n = 2^{2n}$ 发散。

$\{a_n \pm b_n\}$ 可能收敛也可能发散:

(I). $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n \Rightarrow a_n - b_n \rightarrow 0$, $a_n + b_n$ 发散;

(II). $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow a_n - b_n$ 发散, $a_n + b_n \rightarrow 0$.

题目 13. 1.2.6.

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

解答: 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}_+$ 满足 $k > N_1$ 时 $|a_{2k+1} - a| < \varepsilon$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}_+$ 满足 $k > N_2$ 时 $|a_{2k} - a| < \varepsilon$, 所以 $n > N = \max\{2N_1 + 1, 2N_2\}$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是 $a_n \rightarrow a$.

注: 注意奇数项子列的下标是 $2k + 1$, 这里的 N 如果取 $2\max\{N_1, N_2\}$ 就不对了。

题目 14. 1.2.7.

解答: 回顾: 收敛数列的子列一定收敛, 且极限与原数列相等。

- (1). 对于 $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, 考虑以下两个子列:

$$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \rightarrow 1,$$

$$a_{2k+1} = -\frac{2k+1}{2k+2} \rightarrow -1,$$

子列的极限不相等，因此数列 $\{a_n\}$ 不收敛。

(2). 同理。

注：在一些同学的作业中出现了这样的表述： a_n 是“正负交替”的，因此不收敛。这样的表述是不严谨的，因为“正负交替”的数列当然也可能收敛，比如 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 。但本题目 (1) 中的“正负交替”数列却是发散的，关键在于什么呢？这一数列在 n 充分大的时候会在两个极限值之间反复横跳，除了写出两个子列使他们极限不相等之外，我们还可以用柯西收敛准则来判断：一个数列收敛的充要条件是在 n 足够大时，任意两项的差能任意小。对于 (1) 中的 a_n ，可以发现：

$$|a_{2k+1} - a_{2k}| = \left| 2 - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right| \geq 1, \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

所以 a_n 并不收敛。

题目 15. 1.2.8.

解答：

(1).

$$a_n = \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{4}{3}.$$

(2).

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

(3).

$$\begin{aligned}a_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)}\right) \\&= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k^2 + k}\right) \\&= \prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2 + k - 2}{k^2 + k}\right) \\&= \prod_{k=2}^n \left(\frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)}\right) \\&= \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+2}{k+1}\right) \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}\right) \\&= \frac{n+2}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1 + \frac{2}{n}}{3} \rightarrow \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(4). 方法同 (3), 答案是 $\frac{1}{2}$.

(5).

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{(1-q)a_n}{(1-q)} \\&= \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})}{(1-q)} \\&= \frac{(1-q^2)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})}{(1-q)} \\&= \frac{(1-q^4)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})}{(1-q)} \\&= \frac{1-q^{2^{n+1}}}{(1-q)} \rightarrow \frac{1}{1-q}.\end{aligned}$$

题目 16. 1.2.12.

解答:

- (1). 不正确, 只有在已知等式 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边的极限都存在时 (即我们需要先证明数列 $\{a_n\}$ 收敛), 才能对等式 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边同时求极限。
- (2). 不正确, 这并不符合极限的四则运算法则, 求和的项数是随着 n 的变化而变化的。
- (3). 不正确, 原因同上, 乘积的项数是随着 n 的变化而变化的。

思考: (1) 的反例: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. 而且, 即使我们假定 a_n 收敛, (1) 的思路也不总是可行的。例如: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 如何? 两边同取极限得到 $a = (\sqrt{2})^a$, 代入 $a = 2$ 或者 $a = 4$ 都是成立的, 但收敛数列显然不可能有两个不同的极限。感兴趣的同学可以思考一下: 上述例子中 a_n 收敛吗? 将 $\sqrt{2}$ 改成其他数字, 在什么情况下是收敛的呢?

题目 17. 1.2.14

$a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c_n = \max\{a_n, b_n\}, d_n = \min\{a_n, b_n\}$, 求证:

$$c_n \rightarrow \max\{a, b\}, d_n \rightarrow \min\{a, b\}.$$

解答: 如果 $a = b$, 那么 $(a_n - b_n) \rightarrow 0$, 于是

$$c_n = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2} \rightarrow \frac{a + a}{2} = a,$$

$$d_n = \frac{a_n + b_n - |a_n - b_n|}{2} \rightarrow \frac{a + a}{2} = a.$$

命题成立。

如果 $a \neq b$, 不妨设 $a < b$, 令 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$,

$$\text{存在 } N_1 \text{ 使得 } n > N_1 \text{ 时 } |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{存在 } N_2 \text{ 使得 } n > N_2 \text{ 时 } |b_n - b| < \varepsilon \Rightarrow b_n < b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}.$$

于是 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$a_n < \frac{a+b}{2} < b_n.$$

从而 $c_n = b_n \rightarrow b, d_n = a_n \rightarrow a$.

注:

1. 我们也可以用极限的保号性直接得出“存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得 $n > N$ 时 $a_n < b_n$ ”。
2. 如果两个收敛数列在某一项之后完全相同, 也就意味着只有有限项不同, 所以极限也相等。