图论导引
笔记 & 题解

Eastwind

目录

readme:

这篇解答的前身是作者自己学习图论这门课时的笔记与做题记录, 因此在尚未完成的部分用了一些个人习惯的记号以标识. 以下用到的包括:

‘: trivial 的内容, 写笔记的时候懒得填, 以后再找时间完成 (虽然好像从来没有完成过)

1: 超纲的内容/题目. 结课了之后有时间了再来写 (图论课程每年的考纲不一定一致, 请读者注意)

此外, 分享这份解答的目的在于帮助想要深入学习的读者获得更好的学习反馈, 以免他们像作者当年那样做了题后陷入无答案可对的处境. 请任何读者不要直接抄这里的解答来完成课程作业! 事实上, 由于题解部分的解答都是按照向学习者讲解的细致程度写的, 在内容上会比一般的题解细碎且含有大量文字, 抄这样的解答完成作业耗时很高且很容易被你的助教发现.

1 图的基本概念

笔记

例 1.6

注意到, 如果一个图不连通, 那么它的每个连通片各自也成图, 从而也必须满足图的种种性质.

p.s. *讨论一个结构"是否成图"听上去很奇怪. 毕竟图的定义看上去只给出了一些命名, 而不像群环域的定义那样有限制性, 所以一个结构似乎只要有边有点就算是有鼻子有眼, 进而满足了图的定义. 其实图的限制性在于点可以是任意的, 但不能有"无主之边", 即每条边必须能找到一个无序点对与之对应 (超图承认更加广义的图, 不过不在本书讨论范围内. 可参考清华教材). 更加形式一点地说, 回归定义 1.1 , 正是其中* $\phi(G)$ *的存在决定了这种限制性.*

定理 1.2

二分图 $\to$ 无奇圈: 易证.

无奇圈 $\to$ 二分图:

对于证明一个图 G 是二分图, 首先想到如果 G 是非连通图, 那么只要 G 的每一个连通片各自符合要求即可推出 G 符合要求. 特别地, 如果 G 中存在度数为 0 的点 (即单独一个点的连通片) 将该点划入 X 或 Y 中哪个都是无伤大雅的. 由此将命题划归到只考虑连通图的情况.

对于连通图的情况, 试图给出一个划分出 X 与 Y 的算法. 注意到 $dist$ 在这里很适合用上即证.

p.s. 这一证法用到的划归思想在图论的证明题中常有运用.

例 1.8

用如下算法构造出一个圈 C:

(1) 在 G 中任取一个点 v_0;

(2) 由于 G 是简单图且 $\delta > 1$, v_0 必然有除它自身以外的邻顶, 任取其一 v_1;

(3) 同理, v_1 必然有除 v_0 和它自身以外的邻顶, 任取其一 v_2;

(4) 设上一个取到的点为 v_i, v_i 必然存在除 v_{i-1} 以外的邻顶. 如果其中存在一个已经被取到过 (设为 v_k) , 则:

$v_k - v_{k+1} - ... - v_{i-1} - v_i - v_k$

即为所求. 算法结束.

否则 (如果所有邻顶都是新的) , 任取一个未被取到的邻顶 v_{i+1}, 回到 (4) .

每次执行步骤 (4) 且判断为假时, 都会新添加一个被取到的点. 而 G 是有限图 (如无声明本书考虑的图都是有限图) , 故步骤 (4) 必定在有限次重复后判断为真.

p.s. 对于存在性命题, 给出一个构造算法以证明是常用的做法.

p.p.s. 尽管本书默认不考虑无限图, 但依然要指出, “有限图”的条件在这道题中是必要的: 对于无限图, 可构造反例如下: 对于整数集 Z, 以其中的每一个元素 (即所有的整数) 为顶点, 在两个点之间连 1 条边当且仅当这两个点对应的整数的差的绝对值为 1:

picture

可以验证, 由此构造出的图满足:

1. 是简单图 (无环和重边) ;

2. $\delta = 2$;

3. 无圈.

故其构成所给命题的反例.

(以上 *3* 条性质看上去十分符合直观, 形式化的证明过程的书写就留给读者作为习题—-如果读者对严格证明如此“显然”的命题感到为难, 不妨尝试从定义出发.)

书上的证法利用到了“图中存在最长轨道”这一论断, 显然也以“有限图”为必要条件.

例 1.11

如果 G 不连通, 则 G 至少有 2 个连通片. 那么 G^C 至少具有一个完全二分图中所有的边, 而完全二分图本身已经是连通的.

p.s. 解答将 G 分为了不连通的两个部分, 直观上好像是“两个连通片”. 但出于证明的严谨性, 要注意到对于 G 具有 3 个或更多的联通片 $X, Y, Z...$ 的情况, 应令 $X' = X$, $Y' = \cup\{Y, Z...\}$ 以使 X' 与 Y' 在 G 中不连通, 从而使 G^C “至少是一个完全二分图”.

算法 1.1 (Dijkkstra 算法)

对于寻找最短路径的问题, 非平凡的地方主要在于当我们找到一条路径后, 如果不洞察整个图的所有信息, 我们如何确定手头上的路径是不是最短的. 例如, 对于下图求从 v_0 到 v_1 的最短路径时, $l = v_0v_1$ 是一条直观的路径, 但它实际上比有着更多边的 $l' = v_0v_3v_2v_1$ 更长.

picture

为了尝试解决解决这类情况, 我们可以作如下考虑: 首先我们知道, 终点与

起点 v_0 相同时, 最短路径的长度显然为 0. 在此基础上我们要考虑其它顶点 v_i, 直观上最容易考虑的无疑是已经解决的点的邻点. 为什么如此优先考虑呢? 我们知道, 寻找从 v_0 出发前往它的邻点 v_1, $v_2 ... v_d eg(v_0)$ 的这 $deg(v_0)$ 条最短路径, 有一些方案可能是要绕路的. 但决不可能每一个这样的路径都要绕路, 理由如下: 现在从 v_0 出发, 只考虑与之相邻的所有定点. 我们确实没法断定从起点到所有这些邻点的每一个的最短路径, 但我们可以关注其中边权最小的一点 (下图的点 v_2) :

picture

从 v_0 到 v_2, $l_2 = v_0 v_2, d = 1$ 已是一条可行的路径. 而任何通过其它邻点"中转"的路径, 都要至少经过一条边权大于 1 的边, 何况后面还有其它的边呢. 故而我们能够确定, l_2 以外的所有从 v_0 到 v_2 的路径都比 l_2 长, 亦即 $l_2 = v_0 v_2$ 正是我们所要找的最短路径.

将我们上面的过程抽象出来重新审视: 从 v_0 出发到 v_i, 我们已知一个使路径长为 d_i 的方案 l_i; 而所有其它方案的长度至少大于 d_i (哪怕我们并不知道它们的确切的值) . 那么我们便可以笃定这一长为 d_i 的路径即为所求. 下面我们会看到, 这正是 Dijkstra 算法的核心洞见:

现在我们已知最短路径的点集中已经不只有顶点了, 因此我们下一步要关注的点 (以及边) 也不能只有 v_0 的邻点 (以及它们和 v_0 之间的边) , 而是这个点集中的所有点的邻点点集之并. 否则, 如果我们仅在 v_0 的其余邻点中考虑, 然后如法炮制地得到一个"最短路径第二短的点"的最短路径, 我们怎么知道从 v_2 绕路会不会更加划算呢? 对于上图的例子, 如果要到达 v_3, 这一方法会给出 $l_3 = v_0 v_3 (d = 6)$ 作为输出. 但目力所及之内, 起码已经有 $l_3\text{'} = v_0 v_2 v_3 (d = 4)$ 是一条比它更短的路径了. 假如真的只考虑其余与 v_0 关联的边然后得出 l_3 那样的结论, 就大错特错了.

与之相反, 假如把所有与 v_0 或 v_2 之一相邻的点放在一起考虑, 我们就能避免这样的局限. 在上图中这样的点有 v_1, v_3, v_4, v_5 与 v_6. 目力所及之内 (以 v_0 为起点!) 通往它们的至短路径则分别长为 $7, 4, 9, 2$ 与 7. (注意此时从 $V = v_0, v_2$ 出发一步之内到 v_3 有多种方案, 显然我们应该选择其中最优的那一种拿出来比较.) 而通往其中任何一点, 任何其它绕远路的路径长度都在它们各自之上. 从而我们得知, 眼下最优的第二步不是刚才的 $v_0 v_3$, 甚至也不是把它比了下去的 $v_2 v_3$, 而是 $v_2 v_5$. 既然如此, 我们也同时得出了以 v_5

为终点的最短路径: $l_5 = v_0v_2v_5, d = 2$.

到目前为止, 我们只不过是在尝试着尽可能多得出一点能够得出的结论, 还没有试着解决整个问题. 但比较敏锐的读者大概已经意识到, 按着这个想法走下去, 我们总可以得出所有点的最短路径. 因为每进行一次判断, 我们总能将一个新点的最短路径方案收入囊中, 所有已知其最短路径的点所构成的集合也会进一步扩大, 成为下一次搜寻的基础. 这样一步步重复下去, 我们总能将点一个一个"吞并"进我们已经洞析的"领土"中, 直至所有点都尽在掌握 (因为我们面对的是有限图) .

现在, 请读者尝试不要看书上的算法, 尝试自行写出我们得出的这一算法的表述.

如果你现在写完了, 将它与书上的 Dijkstra 算法的表述对比. 我们会发现比起我们的做法, Dijkstra 算法引入了始终存在的 d 这一函数. 这是为了保证计算的次数最少. 回顾我们上文第二步的执行: 如果 v_0v_3 在这一轮比较中落败, 现在我们进行此后的比较时还会用它来计算"目前 $v0$ 到 $v3$ 的最短路径", 而这无疑增加了重复的步骤, 是算法应极力避免的. 相比之下, Dijkstra 算法始终记录着"领土"之际的每一个点目前的最佳"战绩". 当一个点此刻的至短路径胜过了所有其它点此刻的最短路径, 它也势必胜过了所有可能的过去 (因为它在比较中被保留到了此刻) 与将来 (Dijkstra 算法的核心思想) 的自身, 从而确实是最短路径.

题解

1.

简单图中无环或重边, 所以选取一条边等价于选取一个无序无重复的点对, 选取方法总数由组合知识即得.

2.

(1). 由“同构”定义中的“一一映射”即证. (2). 反例如下:

picture

p.s. 若额外给出简单图, 连通图等要求, 反例的构造依然与之类似.

3.

给点编号后枚举所有情况, 并注意判断排除同构的那些即可. 略.

p.s. 这里, 严格的枚举与判断算法为: *(1)* 给每一个点编号, 考虑每两个不同点之间的边是否存在以枚举所有简单图; *(2)* 对于其中一个图, 验证此前的所有图是否与之同构 *(*验证的算法为: 遍历两个图各 4 个点的所有一一映射, 检查边关系是否使这个映射成为同构*)* , 直到出现同构时排除或未出现同构而保留; *(3)* 重复 *(2)* 直到最后一个图也完成这样的验证过程. 显然这样一个算法的时间复杂度相当之高, 在面对这道小规模题本身时, 比起靠直觉枚举与判断没有任何竞争力. 本解答中给出这样一个“笨”做法的意图在于告诉读者: 适于这种问题的通用的平凡做法是存在的, 可以用于无技术含量仅消耗时间地解决规模任意高的同类问题 *(*而不必倚仗可能出错, 难以判定的直觉*)* .

p.p.s. *在这整本习题解答中, 我们假设读者已经背下了所有课本上概念的定义, 并接受了 (哪怕并不理解) 所有定理与算法的正确性 (否则你现在更需要读的大概是课本而非此解答) . 因此, 手搓算法类的题目我们将略过解答; 一些 trivial 的等式或不等式的证明也将略过; 可以通过遍历算法解决的问题, 我们也将在给出遍历思路后不予详述—-除非以上题目的其它做法有独特的启发性.*

4.

设该群体人数为 n, 则此群体中一个人的朋友数只有 n 种不同的可能: $0, 1, ..., n-1$.

反证法: 考虑朋友数分别为 0 与 $n-1$ 的两人.

5.

先讨论平凡的情况, 再关注一般情况:

1. $n = 2$:

易证.

2. $n > 2$:

反证法: 设此 $2n$ 人为 $v_1, v_2, ..., v_{2n}$. 不妨设 v_1 至少与所有形如 v_{2i} 的人认识. 则为了使待证命题为假, v_3 只能与至多一个 v_{2i} 认识 (由对称性, 不妨设 v_3 至多认识 v_2) , 那么他的剩下的至少 $n-1$ 个名额只能分配给 v_1 以及 $v_5, v_7 ... v_{2n-1}$ (从而他必须的确认识 v_2) . 由对称性可知, 这一结论对于所有形如 v_{2i+1} 的人成立.

再次分情况讨论:

2.1. $n > 3$:

则 v_1, v_3, v_5, v_7 已满足命题要求;

2.2. $n=3$:

2.2.1 v_5 认识 v_{2i} 中除 v_2 外的至少一个 (不妨设为 v_4) :

则 v_1, v_3, v_5, v_4 满足命题要求;

2.2.2 v_5 恰好只认识 v_2:

则 v_1, v_3, v_2, v_5 满足命题要求;

p.s. 本题解析所用的“分情况讨论, 逐个解决或划归至其他情况, 先平凡后一般”的架构在图论证明中时常会用到.

6.

要证明两个图同构, 即需给出点之间的一一映射并验证边关系. 其余略.

p.s. 本题中值得注意的地方在于, 容易注意到图 *1* 中每个点的地位都是对等的, 所以可以任选图 *1* 与图 *2* 中任任意一对点进行对应. 在此基础之上根据边关系不断试错效率更好.

7.

(1). 由组合知识中的乘法原理即得.

(2). 设 $|X|=m$, 即 X 中有 m 个点, 则有:

$e(G) \leq m(v(G)-m) \leq \frac{(v(G))^2}{4}$

8.

假设切断这 k 条连接 V' 与 $V-V'$ 的边, 剩余的两个联通片必须各自成图. 考虑 V' 或 $V-V'$ 中总度数的奇偶性即可.

9.

由例 1.8 知这样一个图 G 中含圈 (设为 C). 对于 C 上的每一个点, 构成 C 的边已经为其贡献了 2 度数, 故 C 上的所有点都没有不在 C 上的边. 此时 G 中如果还有 C 以外的点, 则这些点与 C 必定不连通, 进而 G 不连通, 矛盾. 故有 $G = C$, 即 G 是一个圈.

10.

(1).

G^C 与 G 的边数应相同, 而二者的边合起来恰好用掉 $K_v(G)$ 中的每条边各一次, 即:

$2e(G) = \frac{v(G)(v(G)-1)}{2}$

然后由数论知识即证.

(2).

由 (1) 知 $e(G) = 5$, 枚举并逐一验证即可.

11.

将 3 维立方体图的其中一条对角线的两点连边即可.

证明不存在同构: 先证明若 n 维立方体图的某个子图与 m 维立方体图同构 $(n > m)$, 则这 2^m 个点在原图中必定是 n 维立方体图的某个投影 (过程书写留给读者作为习题) . 即可证我们添加的这条边无法找到对应的边.

p.s. 构造反例往往需要洞察力, 但也不是没有技巧. 对于本题, 比起直接枚举那几个规模较小的二分图并逐一验证, 更高效的构造反例的方法是直接在

一个 k 维立方体图的基础上加边. 注意到 2 维立方体图只要加边必然变成非二分图, 所以从 3 维开始考虑即可.

12.

若 v_1, v_2 相邻而 v_1, v_3 不相邻, 则选取顶点子集 $A = v_1, v_2$ 与 $B = v_1, v_3$ 即可构成反例.

13.

$2e = \Sigma_i deg(v_i)$

$\frac{2e}{v} = \frac{\Sigma_i deg(v_i)}{v}$

需证即为“平均值小于等于最大值且大于等于最小值”, 显然.

14.

(1).

7 与“简单”图矛盾;

两个 6 与 1 矛盾.

(2).

注意到不等式左侧为前 k 个顶点的度数和; 右侧第一项为前 k 个顶点内部的度数和放大, 第二项为前 k 个顶点与后 $n-k$ 个顶点之间的度数和放大.

15.

考虑 G 的边数最大的二分生成子图 H (如果有多个, 任取其中一个) , 设其点集被划分为 X 与 Y.

下面我们只证明 H 满足所给要求:

反证法: 假定 H 中存在被删去了一大半边的点 (不妨设其中一个为 v_i, 有 $v_i \in X$) :

显然 v_i 原先在 G 中所有与 X 中点相连的边现在在 H 中均被删去. 因为 H 是 G 边数最大的二分生成子图, v_i 与 Y 中点相连的边应尽数保留.

如果后一类边少于前一类, 那么将 v_i 挪到 Y 中, 并改变 G 中所有与 v_i 关联的边在 H 中的保留/删去情况, 得到的新图 G' 将仍是二分生成子图, 且边数大于 G. 矛盾.

p.s.

假如抛开图论的知识不谈, 在本题的解答中, 当我们试图证明 H 恰好就是一个符合要求的构造时, 我们实际上加强了结论. (而这无疑是有风险的.) 如果事先不知道 H 是否满足条件, 我们完全有可能在考虑的时候发现 H 不满足条件, 但将 H 中一个点的两条边删除再给另一个点添加一条边得到的 H' 满足条件, 从而满足条件的不是边最大的二分生成子图 (哪怕“保留尽可能多的边”看上去确实最“有利”) .

在此后的解答中, 我们将频繁地看到“接下来改为证...”“只需证...”这样的连接段落的字眼. 请读者时刻记得自行判断, 这究竟是对原给命题的等价变换, 还是有风险的加强/放缩.

16.

$k = 0$ 或 $k = 1$: 显然.

$k > 1$:

用如下算法构造出一个满足要求的轨道 L:

(1) 在 G 中任取一个点 v_0;

(2) 由于 G 是简单图且 $\delta > 1$, v_0 必然有除它自身以外的邻顶, 任取其一 v_1;

(3) 同理, v_1 必然有除 v_0 和它自身以外的邻顶, 任取其一 v_2;

(4) 设上一个取到的点为 v_i, 若 $i = k$, 显然 $v_0 v_1 ... v_i$ 即为所要找的 L, 算法结束;

若不然 $(i < k)$, 则 v_i 必然存在除 $v_0, v_1, ..., v_{i-1}$ 以外的邻顶, 即存在还没有被取到的邻顶, 任取其一 v_{i+1}, 重复 (4) .

p.s. *不难看出, 本题的这一证法与例 1.8 异曲同工. 在第 24 题的解答里我们还会再次见到这种"给出构造算法"思想的运用.*

17.

必要性:

若不存在, 则从 V' 与 $V - V'$ 两个"区域"中各选一点 (设为 v, u) , G 中必定存在 v_u 之间的路径. 考虑路径上每一个点所属的"区域"即得矛盾.

充分性:

反证法: 若 G 是非连通图, 其连通片为 $X, Y, Z...$

设 $X' = X$, $Y' = \cup Y, Z...$, 则有 X' 与 Y' 不连通. 令 V' 为 X' 即得矛盾.

p.s. *这一解答对"多个连通片"情况打补丁的方法与必要性与例 1.11 解答相同.*

18.

非连通的简单图的边数至多为 $C_k^2 + C_{v-k}^2$.

考虑使此式取值最大的 k 即得.

19.

(1). 所证命题即为”删掉一条边后, 可以增加 1 个联通片, 但也至多 1 个”, 从定义出发即可.

(2). 所证命题即为”删掉一个点后, 可以增加超过 1 个联通片”, 举例显然.

20.

G 中删去 v 后, 若其关联的一条边所延伸出去的“分片”单独构成图 (即构成联通片) , 则其度数和为奇, 矛盾. 故所有“分片”必须偶数个一组成联通片.

21.

反证法:

设这两条轨道为 l_1, l_2, 其端点分别为 a_1, b_1 与 a_2, b_2.

任意地分别取 l_1 与 l_2 上各一点 u, v, 则 G 中存在 uv 路径. 考虑到这条路径可能与 l_1, l_2 有部分重合, 改取其与 l_1, l_2 “恰好相遇”的点为 u', v'. 由待证命题的否定中的“无公共顶点”可知, u' v' 不重合, 即 $dist(u', v') > 0$. 对于通过了 $u'v'$ 的如下四条轨道: a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2 与 b_1b_2, 考虑其长度和与分别的长度, 与 a_1b_1 和 a_2b_2 的长度比较, 即知 a_1b_1 和 a_2b_2 不会是最长的轨道, 矛盾.

22.

这题显然要求 u, v, w 两两不同. 若不然, 任取 G 中一边 $e_0 = ab$, 令 $u = w = a$, $v = b$ 即满足要求. 而这样就平凡得过头了.

任取 G 中 3 个点 u, v, w, 设这 3 个点两两所连成的边在 E 中出现的条数为函数 $f(u, v, w)$, 则 f 的可能取值仅有 $0, 1, 2, 3$.

反证法: 假设任取 u, v, w, $f(u, v, w)$ 2:

任取 G 中一点 a_1, 由于 $v > 1$ 且 G 连通, 故 a_1 至少与一个点相邻, 不妨设其中一个为 a_2.

对于 G 中所有其余的点 v_i, 考虑 $f(a_1, a_2, v_i)$, 由于存在边 a_1a_2, f 只能为 1 或 3.

定义如下两个点集合:

$A = \{v_i | v_i = a_1 \vee v_i = a_2 \vee f(a_1, a_2, v_i) = 3\}$

$B = \{v_i | f(a_1, a_2, v_i) = 0\}$

显然有 $B = V(G) - A$, 且 $A \cap B$ $\emptyset$. 即 A 与 B 构成对 $V(G)$ 的划分.

若 $B = \emptyset$, 则 A 中所有点两两相邻, 即 G 为完全图, 矛盾.

否则, 为使 B 与 A 连通, 由题 1.17 结论, A 中至少有一个点 (设为 a) 与 B 中至少一个点相邻 (设为 b) .

则 $f(a_1, a, b) = 2$, 矛盾.

Q.E.D.

23.

用如下算法构造出一个满足要求的圈 C:

输入: 含 e 的起点与终点相同的行迹 L.

输出: 含 e 的圈 C.

如果 L 的轨道表示中没有重复的点 (起点与终点这一对除外) , 则 L 即为所求的 C;

若不然, 任取 L 的轨道表示中一对重复点 (设为 v_1), 其会将轨道表示分为两部分. 无论 e 在其中哪一部分, 都删去另一部分中的所有边, 并将这两个 v_1 合并成一个. 所得的表示显然没有重边, 故仍是一个行迹, 且起点与终点仍然相同 (均为 v_1) . 命这个行迹为新的 L. 重新进行判断.

每次判断为假时, 都会删去 L 中若干条边. 由于行迹中边的数量是有限的 (定义) , 故循环终将在有限次后终止.

24.

这道题应该是出错了... 对于题给命题可构造反例如下:

picture

此图 G 满足 $\delta(G) = 2$, 但并没有长为 3 的圈.

为了最大程度地保留这道题背后暗含的洞见, 我们猜测出题者的原意如下:

G 是简单图, $\delta(G)$ 2, 则 G 中有长度大于或等于 $\delta(G) + 1$ 的圈.

与例 1.8 的思路类似, 用如下算法构造出一个满足要求的圈 C:

(1) 在 G 中任取一个点 v_0;

(2) 由于 G 是简单图且 $\delta > 1$, v_0 必然有除它自身以外的邻顶, 任取其一 v_1;

(3) 同理, v_1 必然有除 v_0 和它自身以外的邻顶, 任取其一 v_2;

(4) 设上一个取到的点为 v_i. 由于 δ, v_i 必然存在除它的前 $\delta - 1$ 个顶点 (即 $v_{i-1}, v_{i-2}, ..., v_{i-\delta+1}$) 以外的邻顶. 如果其中存在一个已经被取到过 (设为 $v_k, k \leq i - \delta$) , 则:

$v_k - v_{k+1} - ... - v_{i-1} - v_i - v_k$

即为一个长度至少为 $\delta + 1$ 的圈. 算法结束.

否则 (如果所有邻顶都是不满足要求) , 任取一个未被取到的邻顶 v_{i+1}, 回到 (4) ;

每次执行步骤 (4) 且判断为假时, 都会新添加一个被取到的点. 而 G 是有限图 (如无声明本书考虑的图都是有限图) , 故步骤 (4) 必定在有限次重复后判断为真.

p.s.

本题与题 1.16, 例 1.8 类似, 都是依靠 δ 不断延长轨道, 再依据有限性证明递归算法总会完结且输出即为符合要求的构造, 从而所给的存在性命题是正确的. 但我们看题 1.16 与题 1.24 的表述 (假定 1.24 采用的是上文的正确表述) , 为什么 1.24 直接给出了 $\delta+1$, 而 1.16 需要引出 k 来陈述呢? 这是因为"长为 k 的轨道"总是蕴含了"长为 $k-1$ 或更短的轨道", 而圈则未必蕴含更短的圈.

25.

(1).

若为非连通图, 必然存在至少一个连通片满足 $e(G)$ $v(G)$. 故划归至连通图的情况. 若为连通图:

法 1: 运用第 2 章树的知识.

法 2:

先证明: 连通图添加一条边后必然含圈.

运用归纳原理 (参见本题备注 1) . 归纳定义所有连通图, 这里只列出衍生过程:

(2.1) 添加一个点 v_{n+1} 并将其与原图 G 中一个点 v_i 连边;

(2.2) 在原图中任选两个点 v_i 与 v_j, 在它们之间连一条边.

然后证明, 有且仅有使用了至少一次 (2.2) 衍生出的图, 才满足 $e\,v$ (当然从本题的逻辑讲证明“仅有”就够了) .

(2).

若为非连通图, 其所有联通片中要么存在至少两个满足 $e \geq v$, 要么存在至少一个依旧满足 $e \geq v+4$. 对于前一种情况, 划归到第 (1) 问的结论; 对于后一种情况, 只关注这一个连通片, 从而划归到连通图:

对连通图的情况采用反证法:

考虑所有满足条件而结论不成立的图, 其中必然有 e 最小的那一个, 设为 G (如果有多个, 任取其中一个即可) .

先证在 G 中 $e = v+4$:

若 $e > v+4$, 可以将 G 中若干边删除直到 $e = v+4$. 易证所得的新图 G' 边数比 G 少而仍有结论不成立. 矛盾.

再证 $\delta(G) \geq 3$:

连通图 G 中没有 $deg = 0$ 的点;

若 G 中有 $deg = 1$ 的点: 显然该点及与其关联的边不作为构成圈的部分, 故可以将该点删掉而新图 G' 依旧满足条件且结论不成立. 同上理, 矛盾;

若 G 中有 $deg = 2$ 的点: 删去该点并将其关联的两条边收缩成一条, 新图 G' 依旧满足条件且结论不成立. 同上理, 矛盾.

又证 G 中的任何圈长度 ≥ 5:

若 G 中有长度为 3 或 4 的圈, 则删去这个圈上的所有边 (注意: 不改变任何点!) 得到的图 G' 将仍满足 $e \geq v$. 由 (1) 知 G' 有至少一个圈, 而这个圈与刚才被删掉的圈在 G 中均成立且无公共边, 矛盾.

有了这些准备, 现在我们取 G 中任一个最短圈 C, 其上至少有 5 个点. 由于 $\delta\,3$, 这至少 5 点的每一个又至少延伸出去一条边, 且延伸出去的点两两不同 (否则将会出现边数小于 5 的圈) . 这样一来 G 中有 $v \geq 10$, 而 $2e \geq 3v$, $e - v \geq \frac{v}{2} \geq 5$, 矛盾!

综上, 对于满足 $e \geq v+4$ 的连通图 G, G 中至少有两个无公共边的圈.

Q.E.D.

p.s.

25.(1) 是本书习题中第一道适合使用归纳原理, 且不存在其它平凡做法的题目 *(*如果刻意要求不使用第 *2* 章知识的话*)*. 问题在于, 它形式上使用的是归纳原理的变种, 且使用了归纳原理后证明过程依然不是那么平凡, 所以它不是一道适合用来给初学者讲解归纳原理的题目. 如果读者在读到此处时还不了解归纳法, 可以先读后文题目 *2.7* 与 *2.8* 的解答, 或附录中关于归纳原理的部分.

p.p.s.

有的读者可能敏锐地注意到, *25.(1)* 法 *2* 中在归纳定义连通图时, *(2.2)* 没有限制所连的两个点原先没有边, 所以可能与原题中"简单图"的条件不符. 但弱化了条件的证明一样可以作为对原命题的证明. 实际上也的确如此: 对于有环边或重边的图, "有圈"的结论是显然的.

p.p.p.s.

25.(2) 的解答中采用的结构被称为"无穷递降法", 同样还用在 $\sqrt{2}$ 是无理数的证明中. 这一问也可以对 e 使用数学归纳法证明, 其背后的思想与上文给出的无穷递降法本质基本相同 *(*读者不妨自行尝试过程的书写*)*. 需要注意的是这并不是巧合, 数学归纳法与无穷递降法的本质都是自然数的良序原理: 对于一个非空自然数集, 其中的元素必然存在最小的那个. 这方面的内容在数理逻辑课程中将会更深入地讨论.

26.

手搓 Dijkstra 算法, 略.

27.

法 1: 观察法, 略.

法 2: 将所有物品各自所处位置的状态的所有可能性作为点 (共 16 个) , 在彼此之间能够转换的状态之间连边, 对这个图手搓 Dijkstra 算法即可.

p.s.

对这样一道可以凭直觉一眼看出答案的题使用 Dijkstra 算法或许显得有些小题大做. 但正如前文所言, 本解答给出这样的做法并不一定是鼓励读者在面对同一道题目时一定要采用相同的做法, 而是指出这一类问题有平凡的通用方法存在. 就本题中"载物过河"的这个例子而言, 如果问题的规模增大, Dijkstra 算法可以在直觉难以为继时依然有效且简易; 如果题目要求渡河次数最小的方案, 那么直觉虽然能给出方案并直观上感受到其正确性, 却大概难以给出形式化的对"最小"的证明. 一言以蔽之, 在数学中, 我们总是希望能找到平凡的通用方法以解决尽可能广泛的一类问题. 而注意到一个问题属于此类问题进而划归地解决, 这一过程本身便是对数学的锻炼.

28.

同上.

29.

由连通图可知, 没有度数为 0 的点. 又有:

$2e = \Sigma_i deg(v_i)$

由此出发即可.

2 树

笔记

定理 2.1

除书上的按轮换顺序证明 (以求证明次数最小) 外, 另一种几乎不需要洞见 (简单粗暴) 的做法是对树进行归纳定义, 然后对所有命题使用归纳原理. 限于篇幅原因, 我们这里仅举一部分例子:

(关于什么是归纳原理, 请参见题 2.7 与 2.8 的解答, 或附录中关于归纳原理的部分.)

‘

p.s.

证明 n 个命题彼此等价 (互为充要条件) , 称证明 $a_i \to a_j$ (a_i 蕴含/可以推出 a_j) 为“一次”证明, 则所需要的最少的证明次数为 n 次. 方案为证明 $a_1 \to a_2, a_2 \to a_3, ..., a_n \to a_1$, 从而证明对于任意两个命题 a_i, a_j, 满足 $a_i \to a_j$.

(有趣的是, 这一方案的次数“最少”, 这一论断本身也可用图论的知识证明. 可参见第 8 章“有向图”.)

对于已经掌握了知识的教材编纂者来说, 按轮换顺序证明 n 个命题的等价性. 使得书写证明的次数最小, 从而最节约 (各种意义上的) 成本. 但对于学习者尤其是初学者而言, 轮换顺序所选择的每一组“条件”与“结论”之间的联系未必显然. 从而即使读完了证明, 甚至是自己证过了一遍, 也难以感受到其背后的意义. 本解答的作者认为, 比起照单全收书上的 n 个证明, 自己试图尽可能地不断找自己觉得有联系的一对命题证明会更加有收获——哪怕初学时往往无法做完所有的等价性.

题解

1.

利用图的性质:

$2e = \Sigma_i deg(v_i)$

与树的性质:

$e = v - 1$

即可计算出.

对于画树, 枚举并逐一验证即可.

2.

同上.

3.

先证其余顶点读数均为 2, 再给出构造出一个轨道的算法 (选定一片树叶, 选定一个它的新邻顶...) , 最后根据树的连通性证明不存在轨道之外的点.

4.

根据“树不含圈”可证, 删去度数最大的这个点后树必然碎成 Δ 个连通片, 且每个连通片都是树.

这里每棵树自身必然有至少 2 片树叶. 放到原图中, 除了与被删点相邻的点可能从“是树叶”变成“不是树叶”外 (当然也可能在单独的碎片的树里就不是树叶) , 至少还剩下 1 片树叶. 故证.

p.s. 不知道这个命题为什么不写成“至少有 Δ 片树叶”... 它显然符合题 1.16 而不是题 1.24 那种特征...

5.

对于每个连通片, 其是树当且仅当其有 $e = v - 1$. 求和, 然后关注取整条件即可.

6.

给出找到中心的算法并证明算法的输出保证命题成立即可.

找到中心的算法为: 找到 G 中最长的轨道, 轨道最中间的一个或两个点即为中心.

7.

对于非树的森林, 如果其每棵树都符合命题, 则森林也符合命题. 所以考虑只证明命题对所有树成立:

对于树, 使用归纳原理证明:

全体 (有限) 树可用如下方式归纳定义:

(1) 平凡图是树;

(2) 对于树 G, 添加一个新的顶点 v_{n+1}, 并将其与 G 中的一个点 v_i 连边. 所得的新图 G' 仍是树;

(3) 此外无它.

归纳原理证明如下:

(1) 对于平凡图, 其 $k=0$. 而平凡图中无边, 故所有边的确可以划分为 0 条不重边的轨道.

(2) 若 G 符合命题, 则对于其衍生出的 G', 分 v_i 在 G 中度数的奇偶性讨论如何修改轨道方案即可.

Q.E.D.

p.s.

本题是一道典型的可以用归纳原理平凡地证明的题目. 归纳原理在此后的解答中将常有出现. 关于归纳原理的思想及使用方式, 可写的内容实在太多, 故我们不在此题的备注中描绘归纳原理的核心. 相关内容请读者参阅附录.

8.

这道题的后半句有歧义: 究竟是先给定一个图和它的度数序列, 让你看序列推断是不是树；还是给你一个序列，让你尽可能把它做成树. 对于前一种理解, 如果这个度数序列同时还是一个非树图的度数序列, 命题依然成立; 对于后一种理解则不然.

从陈述的严谨性来讲, 对于后一种理解, 将题干改为“... 此序列‘可以’是树的度数序列”更合适, 对于前一种理解则由当前的题干文本与之对应, 或加一个“必定”, 又或者干脆使用形式化的命题描述.

对于后一种理解, 由于没有给出“连通”的条件, 这道题可以轻易构造出反例:

picture

接下来, 我们假定题目的本意是后一种理解, 且仅考虑连通图 (前一种理解下的题目的做法已被蕴含在其中. 判断出哪些部分可以单独拿出来作为这种理解下的解答的工作, 就留给读者作为练习) :

必要性 (是树的度数序列 $\rightarrow$ 满足公式) : 略.

充分性 (满足公式 $\rightarrow$ 是树的度数序列) :

全体非空连通图可用如下方式归纳定义:

(1) 平凡图是连通图;

(2) 对于连通图 G:

(2.1) 添加一个新的顶点 v_{n+1}, 并将其与 G 中的一个点 v_i 连边. 所得新图 G' 仍是连通图;

(2.2) 在其中的两个点 v_i 与 v_j 之间连边. 所得新图 G' 仍是连通图;

(3) 此外无它.

可以验证:

(1) 中的图满足公式;

对于衍生方式 (2.1) , 如果原先的 G 满足公式, 那么 G' 也满足公式, 反之亦然;

对于衍生方式 (2.2) , 如果原先的 G 满足公式, 那么对于 G', 公式左端增加了 2 而右端不变, 进而公式不成立. 同时, 注意到没有任何一种衍生方式能够使右端相对于左端增加. 故一个连通图的衍生过程中, 只要使用了 (2.2) , 所得连通图必然不满足公式.

换言之, 使得公式成立的图, 恰好是全体在衍生过程中只使用了 (1) 和 (2.1) 的图. 由树的归纳定义 (详见 2.7 解答) 知, 这恰好就构成了树的集合. 从而我们证明了: 这样一个度数序列一定不是非树连通图的度数序列.

最后我们用构造法证明一定存在 (至少) 一棵树真的符合这个度数序列:

我们将给定的度数对应的点根据度数分为 3 类:

(1) $deg = 1$

(2) $deg = 2$

(3) $deg > 2$

我们把 (2) 类和 (3) 类顶点拿出来连成一个轨道, 轨道的头尾则由两个 (1) 类顶点代劳. 对于剩下的 (1) 类顶点, 我们将其拼在度数还不够的 (3) 类顶点上. 不难证明: 当所有 (3) 类顶点的度数满足要求, (1) 类顶点也恰好用完.

p.s.

本题和题 2.7 的解答一样, 也使用了归纳原理的思想, 但同样是证明“对于所有的 $x \in P$, 性质 $p(x)$ 成立”这样的命题, 读者不难看出题 2.8 的解答结构与题 2.7 不完全相同.

题 2.7 的解答中所定义的集合, 恰好就是题目中给出的 P, 证明的逻辑是每一次衍生都不破坏性质的成立.

题 2.8 的解答中, 归纳定义出的集合是一个比 P“更广”的集合 Q $(P \subseteq Q)$. 证明的逻辑则是论证在衍生过程中只使用了某一部分衍生方式的元素 x 才恰好构成集合 P. 之所以要这么做, 是因为当采用后一种理解方式时, 题目要证明的实际上是如下两个命题均成立:

(1) 凡满足要求的度数序列, 存在一棵树, 使得这棵树的度数序列是该序列.

(2) 凡满足要求的度数序列, 不存在非树的连通图, 使得该图的度数序列是该序列.

使用更加形式的写法:

(1) $\forall x \in X, \exists y \in Y, s.t. p(x, y)$.

(2) $\forall x \in X, \exists y \in Y$’ 且 $y \notin Y, s.t. \not p(x, y)$.

显然, 2.7 中那样的命题只包含 (1) 的部分, 相比之下 2.8 这样的命题要“更强”.

9.

给出一个构造此子图的算法即可. 背后的洞见与题 1.16 类似.

算法的要义在于从平凡图出发, 逐步拿 G 中的点加进 T 里, 直到 T 为给定的树为止. 详细的过程请参考题 1.16 的解答.

10.

trivial 的, 略.

11.

若同构为同一 (无标定) : 逐一枚举生成子图并验证其是否是树, 再对每两对符合要求的情况逐一枚举所有的一一映射以判断其是否同构. 略.

若同构不为同一 (有标定) : Cayley 定理, 略.

12.

若同构为同一 (无标定) :

对生成图 T 中保留的辐条的数量分类讨论.

辐条数为 k 时, 考虑如何切割分配圈上的边即可, 最后记得根据对称性减去同构的那些情况.

若同构不为同一 (有标定) :

法 1: 对 W_n 使用 Cayley 定理, 选定圆周上的一条边作为 e.

在 W_n 中删去 e 后, 我们将得到这样一个图 (所选的边为 v_1v_n):

picture

(我们将这种图命名为“扇图”, 记为 L. 如果图的底边有 n 个点, 我们便称其为 n 阶扇图, 记为 L_n.)

在 W_n 中收缩 e (且不合并重边) 后, 我们得到这样一个图:

picture

(我们将这种图命名为“1-轮图”, 记为 W^*. 如果图的圆周上有 n 个点, 我们便称其为 n 阶 1-轮图, 记为 W_n^*.)

接下来先考虑对 1-轮图使用 Cayley 定理, 显然适合选定两条重辐条中的一条作为 e.

删去 e 后, 我们得到 W_{n-1}, 此时采用递归即可; 收缩 e 后, 我们得道这样一个图:

picture

(我们将这种图命名为“2-扇图”, 记为 L^{**}. 如果图的底边有 n 个点, 我们便称其为 n 阶 2-扇图, 记为 L_n^{**}. 注意: 必须两组重边各出现在两端的辐条处, 才叫 2-扇图.)

紧接着考虑对 2-扇图使用 Cayley 定理, 显然适合选定两对重边中的其中一对的其中一者作为 e.

收缩 e 后, 我们得到核心点有一个环边的低 1 阶的 2-扇图, 显然环边不会出现在生成树中, 所以我们将其删去即可, 然后递归到低阶 2-扇图的情况; 删去 e 后, 我们得到这样一个图:

(我们将这种图命名为“1-扇图”, 记为 L^*. 如果图的底边有 n 个点, 我们便称其为 n 阶 1-扇图, 记为 L_n^*. 注意: 必须重边各出现在一端的辐条处, 才叫 1-扇图.)

然后考虑对 1-扇图使用 Cayley 定理, 显然适合选定两条重边中的一条作为 e. 删去 e 后, 我们得到同阶扇图; 收缩 e 后, 同上理删去环边, 我们得到低 1 阶的 1-扇图.

最后我们看到一开头衍生出的扇图. 考虑其一端的底部的边 (上图中的 e) , 对于其使用 Cayley 定理.

删去 e 后, 我们得到伸出一片树叶的低 1 阶的扇图, 由于与这片树叶关联的边必须被保留, 情况被划归到低阶扇图; 收缩 e 后, 我们得到低 1 阶的 1-扇

图.

现在, 所有的情况都被我们递归到扇图和 1-扇图的情况. 枚举易得 1 阶扇图与 1 阶 1-扇图的生成树数目分别为 1 和 2. 采用递归算法即可.

法 2: 对 W_n 使用 Cayley 定理, 选定一条辐条作为 e.

在 W_n 中删去 e 后, 我们得到这样一个图 (所选的边为 v_0v_1) :

picture

删去那两条圈上边 (v_1v_2, v_1v_n) 中的任一条, 我们得到伸出一片树叶的低 1 阶的扇图; 收缩它后则得到低 1 阶的轮图.

此后同法 1.

现在, 我们得到了一个计算 $\tau(W_n)$ 的 (时间复杂度极高的) 递归算法. 显然这不是对于这道题我们所能达到的最令人满意的结果. 接下来, 我们将通过 $\tau(L_n)$ 与 $\tau(L_n^*)$ 的递推公式, 推导出它们的通项公式, 从而获得一个平凡的公式.

根据对 L_n 与 L_n^* 使用 Cayley 定理的结果, 我们有:

$\tau(L_{n+1}) = 2\tau(L_n) + \tau(L_n^*)$ ①

$\tau(L_n^* + 1) = \tau(L_{n+1}) + \tau(L_n^*)$ ②

不断将②代入①, 我们得到下式:

$\tau(L_{n+1}) = 2\tau(L_n) + \tau(L_{n-1}) + \tau(L_{n-2}) + ... + \tau(L_2) + 2$ ③

(式末的 2 即为 $\tau(L_1^*)$.)

与之同构:

$\tau(L_n) = 2\tau(L_{n-1}) + \tau(L_{n-2}) + \tau(L_{n-3}) + ... + \tau(L_2) + 2$

$\tau(L_n) - \tau(L_{n-1}) = \tau(L_{n-1}) + \tau(L_{n-2}) + \tau(L_{n-3}) + ... + \tau(L_2) + 2$ ④

将④代入③有:

$\tau(L_{n+1}) = 3\tau(L_n) - \tau(L_{n-1})$

根据此求

法 1: 不断使用特征根法;

法 2: 我们知道斐波那契数列 $f_{n+1} = f_n + fn - 1$.

注意到如下关系:

$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = 2f_n + f_{n-1} = 2f_n + (f_n - f_{n-2}) = 3f_n - f_{n-2}$

此后显然.

p.s.

所给命题如果视同构图为同一图, 所得的表达式十分复杂繁琐且几乎没有化简的可能. 我们倾向于认为题目只对后一种理解下的解题作要求.

p.p.s.

关于后一种理解下的解法, 看似篇幅很长且引入了许多新的概念, 但实际上没有哪一步需要过强的洞察力. 读者如果在抓到思路后自己做一遍就会发现, 每一个状态下的下一步走法其实都是水到渠成. 多达四个概念的引入也仅仅是为了提出名字, 使下文的叙述更加简便罢了.

—-当然这并不是在要求读者, 在读完题目时就能够确信这道题的过程是平凡的. 对于大部分人来说, 真正意识到解法已尽在掌握, 应该是在发现所有衍生出的图都可以划归到扇图与 1− 扇图的情况之时.

13.

全体边在所有的生成树中共出现 $(n-1) * n^{n-2}$ 次.

而每条边由对称性可知出现次数相同.

用总“边次”除以总边树, 即可得到一条边出现的次数.

而这也正是含这条边的生成树数量.

14.

手搓算法, 略.

15.

找到所有的连通片, 对每个连通类分别执行算法.

时间复杂度略.

16.

(1) 找到一个圈, 找到这个圈上权最大的边, 删去. 重复 $e-v+1$ 次.

(2) 书上证明 Prim 算法的正确性时用了反证法, 我们的证法与之类似:

首先, (1) 种算法的每一步都不破坏图的连通性, 故所得子图依然是连通图; 在此基础之上, 根据点边数量关系可知所得子图是树.

设算法的输出为 T', 若存在 G 的一棵最小生成树与之相同, 结论成立.

否则, 设 G 的一棵最小生成树是 T, 设 e 为算法过程中第一条被从 T' 中删去而在 T 中的边. 则 e 在 (当时那一步的 T' 的) 至少一个圈上, 且在至少一个圈上是最大边 (之一) .

设这个圈为 C. 由树的无圈性知, C 上有至少一边 e' 不在 T 中. 由破圈法算法知 $w(e\text{'}) \leq w(e)$. 若等号不成立, 则 $T-e+e$' 是比 T 更小的生成树 (由无圈性证明它是树) , 矛盾. 故等号成立.

故 $T-e+e$' 也是 G 的最小生成树之一. 重复以上过程, 直到 T 与 T' 的边完全相同.

(3) 略.

17.

‘

18.

归纳原理: 每一次“生长”都不破坏这一等式.

(归纳定义的严格书写, 以及证明过程, 均留给读者作为练习.)

19.

归纳原理.

20.

trivial.

21.

同上.

22.

先根据算法证明 Huffman 树是正则二叉树 (每一次产生分支都必然分配两个儿子) .

再根据算法证明 Huffman 树中所有树叶权值与深度 (非严格) 负相关.

正则二叉树中最深的一层必然只有以兄弟成对出现树叶. v_1, v_2 必然是兄弟, 而不可能不在最深层.

23.

归纳法:

(1) $t = 1$ 时: 成立;

(2) 若 $t = i$ 时成立, 则对 $t = i + 1$ 的情况:

由引理 2.1, 可知权值最小的两个顶点应有相同的父亲. 将这个父亲的权值作为新的权值, 与其余 $i - 1$ 个权值作考虑, 即可划归到 $t = i$ 的情况.

Q.E.D.

24.

(1). 若不然, 通分求和后分子为奇数, 即概率和不为 1.

(2).

只需证明算法的输出是给概率为 $\frac{1}{2^{n_i}}$ 的符号分配长为 n_i 的码.

用归纳原理证明. 其中归纳定义的衍生方式为不断将 p_i 分裂成两个 $\frac{p_i}{2}$.

25.

归纳原理:

归纳定义 $v \geq 3$ 的连通图所成集合 (称为 W_3):

(1) 下图 (称为 G_0) 属于 W_3:

picture

(2) 若 $G \in W_3$, 则在 G 中:

(2.1) 添加一个新点 v_{n+1}, 将其与 G 中任一点 v_i 连一条边, 新图 G' $\in W_3$;

(2.2) 在任两点 v_i, v_j 之间连一条边, 新图 G' $\in W_3$;

(3) 此外无它.

此后略.

p.s.

本题中的归纳原理是我们遇到的第一个"归纳定义出的集合并不显然是所给集合"的案例. 出于严谨性和可读性的考虑, 读者在自行书写解答过程时最好证明这样定义出的集合正是所给集合. 借此机会, 我们正好讲解一下如何证明归纳定义出的集合的内涵. 由集合论基础知识, 证明两个集合相等, 我们需要两步 (下设 $v \geq 3$ 的连通图所成集合为 W_3, 所定义出的集合为 W_3^*.) :

(1) 证明 $W_3^* \subseteq W_3$, 即所定义出的都是 $v \geq 3$ 的连通图:

使用归纳原理证明即可.

(2) 证明 $W_3 \subseteq W_3^*$, 即 $v \geq 3$ 的连通图都可以如此定义出:

形式化的证明方法为: 对于每一个 $v \geq 3$ 的连通图, 给出由 G_0 出发, 使用 (2.1) 与 (2.2) 生成目标图的一个生成序列. 当然, 我们难以用一种形式描述所有 $v \geq 3$ 的连通图, 所以写出生成序列改为给出一个可以求出生成序列的算法更加方便.

算法内容显然, 略.

26.

给每个硬币编号, 则一共有 4 种不同的可能的情况. 每次称量可从 3 种可能性中分辨出一种, 故至少需 $\lceil log_3 4 \rceil = 2$ 次.

算法试错即可, 略.

p.s.

实际上, 由信息论知识可知, 哪怕只知道存在一枚异常的硬币但不知其相对重量, 也可以用 2 次分出来. 算法留给读者作为习题.

如果你觉得算法很难想出, 不妨考虑额外使用一枚已知其正常的硬币.

27.

若不是, 则能够更长. 略.

3 图的连通性

笔记

施工中!

题解

施工中!

4 平面图

笔记

定理 4.4 (Eular 公式)

使用归纳原理易证.

归纳定义连通平面图:

(1) 平凡图是连通平面图;

(2) 对于一个连通平面图 G:

(2.1) 添加一个新的顶点 v_{n+1}, 并将其与 G 中任一点 v_i 连一条不与其它边相交的边, 所得新图 G' 仍是连通平面图;

(2.2) 任选两个顶点 v_i, v_j 间连一条不与 G 中其它边相交的边, 所得新图 G' 仍是连通平面图.

(3) 此外无它.

此后验证即可.

p.s.

书上给出的证明思路为归纳法, 但我们认为即使过程书写极为相似, 归纳原理的证法更加符合直观.

为什么说归纳原理或许更加直观? 在利用归纳法或归纳原理证明某一命题时, 在证明"衍生保持性质 p 不变"时, 我们总是期望我们能够洞析作为衍生的开始的对象 (G) , 以便利用 G 的性质 p. 如果 G 的性质 p 在我们看来有多种可能, 那么 G 的性质 p 可能难以推导出 G' 的性质 p, 甚至二者可能看上去毫无联系.

在本题中, 如果对平面图按顶点个数进行划分 (归纳法) , 我们会难以想清楚一个顶点数为 v 的平面图 G 的所有细节; 但归纳原理所给出的生成方式, 却能够给每一个平面图 G 一个独立的状态, 从而我们能够更加形象地了解

G'. 当然, 在本题中, 使用归纳法同样能够比较轻易地证出 *Eular* 公式, 这种区别也体现不出来.

光是这么说下来或许有些抽象. 在题 *5.8* 与 *6.12* 的备注中, 以及在附录中关于归纳原理的部分中, 我们将详细讨论归纳原理的这一局限.

题解

1.

平面嵌入如下:

picture

picture

2.

注意到每个面至少是三边形, 因而总边权至少是 15, 边数至少是 8.

在此基础上试错即可. 略.

3.

(1).

$e(G)+e(G^C)=e(K_v)=\frac{v(v-1)}{2}$

为使 G 与 G^C 均是平面图, 应有 $\frac{v(v-1)}{2}>2(3v-6)$

解不等式即可.

(2).

构造如下:

picture

4.

代入 Euler 公式计算, 略.

5.

对于非连通图, 注意到它的每个连通片共用同一个外部面. 除去外部面, 每个连通片均满足 $v-e+\phi=1$.

求和, 再加上外部面即可.

6.

(1).

反证法: 若 $\delta > 5$:

则有 $2e \geq 5\phi, 2e \geq 3v$

即 $\phi \leq \frac{2e}{5}, v \leq \frac{2e}{3}$

代入 Euler 公式解不等式即可推出矛盾.

(2).

构造: 正十二面体的平面嵌入.

p.s.

包括本题在内, 接下来的一系列题目本质都是根据可平面图满足的等式或不等式推出一个目标不等式. 注意这并不一定是普通的线性规划问题, 有时还需要根据语境注意合理性隐含的条件. 例如, 如果我们考虑的对象为"n 面体", 那么除了平面图的条件外还有 $\delta \geq 3$ 与 $\delta(\phi) \geq 3$ 的隐含条件.

7.

$2e = \Sigma deg \geq 5v$

故 $e \geq \frac{5v}{2}$, 即有 $v < 12$

但 $e \leq 3v - 6$, 即有 $v \geq 12$, 矛盾.

8.

(1).

$deg(\phi) \geq k$

故有 $2e \geq k\phi$, 即 $\phi \leq \frac{2e}{k}$.

又有 $v \geq \frac{(k-2)e}{k} + 2$, 即得.

(2).

Petersen 图有 $k = 5, v = 10, e = 15$, 不满足不等式.

9.

除了利用平面图的条件外, 还要注意:

对于正多面体, 每个点关联至少 3 条边 (棱) ;

每个点的所有面角大小相等, 且这些面角的度数和小于 2. 此外这些面角有都是正多边形的内角.

基于此逐步讨论即可.

10.

结合 Euler 公式与 $deg(\phi) \geq 3$ 即可.

11.

充分性:

如果一个图 G 低于 2-连通, 说明删去 1 条边即可使 G 不连通 (即 G 中有桥) .

下证桥的两侧必定是同一个面 (进而这个面的边界是非圈回路) :

首先考虑桥的任一侧的面, 它的边界上必然同时属于有删去桥后两个连通片的边. 而边界上属于两个连通片的两部分之间必须要被连接至少 2 次.

如果这道桥只在回路中出现一次, 两个连通片之间将有其它的边连接, 与 "低于 2-连通" 矛盾.

故而这道桥在这个面的边界中出现两次, 即桥的两侧是同一个面, 因而这个面的边界有重复边, 不是圈.

必要性: 采用反证法:

由于所有边的边界都是回路, 当存在非圈边界时, 只可能是这条回路中有重复的边. 但同时又知道一条边至多只能在一个面的回路中出现 2 次, 故而重复的边 (无论有几条) 恰好出现 2 次.

现在考虑这个非圈边界上任一条出现了 2 次的边 (设为 e) . 它的 2 次出现将整个边界分成两部分. 删去 e 后, 如果两部分上的边依然连通, 则非圈边界所属的面不会成为一个面. 故 e 是 G 的桥, 与 2-连通矛盾. 即证.

p.s. 读者或许能够注意到, 解答中标红的论断缺乏严谨的证明. 尽管它看上去既正确又直观, 也找不到 (由于题给命题的正确性, 实际上不可能找到) 关于它的反例, 但似乎无法说清楚证明它的过程中使用的是哪一条公理或定义.

我们认为，这种非严谨性，或者说非形式性，出现的根本原因在于书上定义 4.1 的非严谨性．尽管每个图论学习者在根据定义 4.1 判断某个图是否为平面图时几乎都会给出相同的答案，但定义 4.1 依然不是完全形式化的．容易注意到，定义 4.1 所涉及的概念中其它概念都有良好的定义，或仅仅是引用了此前已经定义过的概念，但"可以画（在平面上）"没有形式化的数学含义．如果形式地改写这个命题，我们会得到：

称一个图为平面图，当且仅当存在一种它的画法，其中任意两条边都不相交；反之，称一个图为非平面图，当且仅当对于所有它的画法，其中都存在至少一对相交的边．

从这样形式化的定义出发，如果我们要证明一个图可嵌入平面，只需要给出一种的确合乎要求的画法就可以了；但要证明一个图不可嵌入平面就麻烦了：我们需要证明一个性质对"它的所有画法"成立．现在问题出现了：什么叫做"所有画法"？如果我们既没有定义"画法"这个概念，也没有给出一种能够表示所有画法的格式，我们要怎么证明一个关于"画法"的全称命题呢？类似的，我们来看如下一道图论题目：

picture

尽管这道题看似用到了图论的概念，但证明中需要用到的其实是拓扑中关于同胚的知识．

当然，限于篇幅和主题，教材不可能花费大短篇幅引入拓扑的概念与知识，何况是将其严格地运用到图论知识的讲解中．正所谓语言的含义是由使用者群体所决定的，如前文所言，定义 4.1 的非形式性大概并不会使得我们在交流中使用"平面图"这个词时指称到不同的对象．读者在本章的学习中也不必时时纠结于概念与证明的形式化．我们决定在本题的解答后附上这一段（标红的）关于定义形式性的讨论，仅作供读者拓展视野与深入思考之用．

12.

略.

13.

利用欧拉公式等, 然后整理式子. 略.

14.

trivial.

15.

trivial.

16.

已知 $\theta(K_{3,3}) > 1$; 由题 4.1 易知存在 $\theta = 2$ 的平面嵌入. 故 $\theta = 2$.

17.

按下图可收缩至 K_5, 可知 $\theta > 1$.

picture

此后同上.

18.

观察不等式右端取整函数内: 分子分母同时约去 2 后, 分子为 K_n 边数, 分母为每层平面可承载的最大边数. 显然.

$v \leq 8$ 时的平面方案如下:

picture

19.

1

20.

1

21.

1

22.

1

5 匹配理论

笔记

定理 5.1 (Hall 定理)

必要性: 显然.

充分性:

反证法: 假设 G 中没有将 X 完全许配的匹配.

考虑 G 中将 X 中的点许配了最多的匹配 M (一如既往, 如果有多个, 任选其一) . 不妨设一个未被 M 匹配的 X 中的点是 x_0.

(1) 如果 x_0 没有邻点, 令 $S = x_0$, 则 S 不满足 Hall 定理的条件, 矛盾;

(2) 如果 x_0 的邻点中还有未被 M 许配的点 y_i, 在 M 中增加 $x_1 - y_i$ 后即可得到比 M 更大的匹配, 与 M 的最大性矛盾;

(3) 如果 x_0 的所有邻点都被 M 许配, 任选其一个邻点 y_1, 我们仿照上文思路考虑 M 许配给其的点 x_1, 只不过考虑三种情况的优先顺序要改变一下:

(3.1) 如果 x_1 还有未被 M 许配的邻点 y_i, $x_0 - y_1 - x_1 - y_i$ 即可构成可增广轨道, 与 M 的最大性矛盾;

(3.2) 如果 x_1 的所有邻点都被 M 许配, 任选其一 (设为 y_2) 及与其匹配的点 (x_2) , 对 x_2 重复这个过程;

...

(3.3) 如果 x_1 没有其它邻点, 开始考虑 x_0 的另一个邻点 y_2 及其 x_2, 对 x_2 重复这个过程. 如果此时 x_0 也没有其它邻点, 令 $S =$ 刚才所有被考虑过的 x, 则 $N(S)$ 将会是除了 x_0 以外的所有 x_i 对应的 y_i. 显然有 $|S| = |N(S)| + 1$, 矛盾.

由于 G 是有限图, 而以上算法每执行一步都会将一个新的 x 纳入考虑, 因此算法一定会在有限步之后结束, 以找到比 M 更大的匹配或推翻 Hall 定理的

条件为结束. 故 G 中一定有将 X 中的点都许配的匹配.

定理 5.2 (König-Egerváry 定理)

我们使用归纳原理:

如下归纳定义所有的二分图:

(1) 空图是二分图;

(2.1) 在一个二分图 G 的基础上, 在 X 或 Y 中添加一个孤立的点 x_{m+1} 或 y_{n+1}, 所得的新图 G' 仍是二分图;

(2.2) 任选 X 与 Y 中各一点 x_i 与 y_j, 在它们之间连一条边, 所得新图 G' 仍是二分图;

(3) 此外无它.

下面我们用归纳原理证明所给命题成立:

(1) 空图的 α 与 β 均为 0, 成立;

(2.1) 增加一个孤立的点后, 由于没有增加新的边, 旧图 G 的最大匹配仍然是新图 G' 的最大匹配 (显然 G' 的最大匹配不会更小; 若 G' 有更大的最大匹配, 则该匹配在 G 中依然成立) . 旧图 G 的最小覆盖也依然是 G' 的最小覆盖 (理由同上) . 结论依旧成立;

(2.2) 这是最为综合的情况.

我们先考虑其中二者均增加 1 的情况:

在 x_i 与 y_j 连边后, 如果 x_i 与 y_j 均未被 G 的最大匹配 M 许配, 那么至少 M 加上 $x_i - y_j$ 后是 G' 的一个匹配, 从而 $\alpha(G') \geq \alpha(G) + 1$. 同时, 由于只增加了一条边, 也一定有 $\alpha(G') < \alpha(G) + 2$. 故恰有 $\alpha(G) = \alpha(G) + 1$.

显然选择 x_i 与 y_j 中的任何一点加入覆盖方案后, G 的最大覆盖 C 就被修改成了 G' 的一个覆盖 C'. 所以 $\beta(G') \leq \beta(G)+1$. 现在我们需要证明 $\beta(G')$ 的确就是 $\beta(G)+1$. 由于一个匹配 M 中的边两两不重, 因此 M 中的边想要

被一个覆盖 C 盖住, C 至少要从这些边的两个点中各选一个, 从而 $\beta \leq \alpha$, 因此 $\beta(G') \geq \alpha(G') = \alpha(G) + 1 = \beta(G) + 1$. 故而有 $\beta(G') = \beta(G) + 1$.

我们再来看二者均不变的情况:

如果 G' 的最大匹配 M' 相比于 M 数目无法增加, 由上文知一个必要条件是 x_i 与 y_j 至少之一已经被 M 许配. 现在我们要证明 β 也不会增加. 如果 x_i 与 y_j 之一在覆盖方案中, 那么新边也已经被盖住, 从而可以直接继承 C 作为 C', β 的确没有增加.

如果 x_i 与 y_j 都不在覆盖方案中, 那么考虑 x_i 与 y_j 中被许配的那个, 不妨设是 x_i. 不妨设 x_i 被许配给 y_1, 那么 $x_i - y_1$ 这条边被覆盖, 一定是因为 y_1 被选入了覆盖方案 C 中.

下面的过程的技巧与 Hall 定理证明中的完全相似.

(1) 如果 y_1 没有除 $x_i - y_1$ 之外的邻边, 我们将 C 中的 y_1 改为 x_i, 即可得到一个最小的 C', 从而 β 没有改变;

(2) 如果 y_1 有其它邻边, 如果这些邻边中任一条的另一点 x_p 没有被 M 许配, 那么 $y_j - x_i - y_1 - x_p$ 构成一条可增广轨道, 与 M 的最大性矛盾;

(3) 如果其它邻点都被匹配, 那么任取其一 x_1 与 y_2, 再次考虑 y_2 即可;

...

由于 G' 是有限图... 下略.

定理 5.3 (Tutte 定理)

关于这一定理的证明, 我们没有想到除书上的证法之外其它有启发性的证法. 同时, 由于书上的证法运用了较强的处理技巧, 许多读者第一次学习这种证法的过程时可能感到陌生: 尽管承认了过程中的每一步推导都是无可辩驳的, 但依旧无法抓住证明的主线. 基于种种原因, 我们不提供其余的证法, 而是以漫谈的形式, 将书上的证法的思路分析一番, 以供参考.

书上关于必要性的证明是平凡的. 大概许多读者哪怕不读证明, 在读到定理之后也能自己意识到这一条件的必要性何在. 我们只聊充分性的证明:

书上的证法提出了一个在以往证明中比较罕见的概念: 基于 G 的极大的没有完备匹配的图 G' . ("基于" 指 G' 通过只在 G 上添加边而不删除任何已有的边得到, 或者说 $E(G) \subseteq E(G')$.) 如果说过去我们读到的证明中有哪个概念与之有一点相似性, 恐怕只有例 1.8 书给证法中的 "最长轨道" 了.

为什么要研究这样的 G' 而不研究 G? 书上的证法处的结尾论道: 对于这样给出的 G', 其要么与条件矛盾, 要么有完备匹配, 从而总是矛盾. 因而定理成立. 回顾想要证明的原命题, 其形式大概是 "满足性质 p 的图有完备匹配" , 但书的过程力图求证的却是 "满足性质 p 的图, 如果再添加任意一条边都有完备匹配, 则其有完备匹配" , 并且证完了这一命题就声称自己证完了原命题, 这难道不是相当于白赚了一个无中生有的已知条件吗?

这种现象看似荒诞, 但回顾过去我们已经习以为常的归纳原理和归纳法, 其实也存在类似的现象. 就归纳法来说, 我们本来是要证明任意自然数 n 满足性质 q, 但归纳递推的时候, 却总自带了 "自然数 $n-1$ 满足性质 q" 这个条件. 在不理解归纳法的人眼里, 这不也相当于平白无故多了一个已知条件么? (归纳原理的情况与之类似.)

这个类比摆到了台面上, 一些敏锐的读者大概已经能够意识到原证明的精巧之处何在了: 实际上, 原命题也具有某种归纳式的结构: 显然完全图 K 有完备匹配, 而删边的过程就是衍生. 它要说明的就是: 只要删边的时候 "删去任何点集后奇片个数不超过所删点个数" 这个性质 p 不被破坏, "有完备匹配" 这个性质 q 也不被破坏.

请读者再次在头脑中想象一棵具象的 "归纳榕树" , 这棵树与常见的归纳原理生成的树不过两点区别: 其一它以完全图 (而非空图或平凡图) 为根源, 与以往的图论证明反其道而行之 (而这显然是一个无关逻辑的区别) ; 其二它是有限的, 如果在衍生的过程中性质 p 被破坏, 性质 q 究竟还是否成立我们也不作担保 (由先前必要性可知, 性质 q 这时总不成立) . 榕树的对应位置上既然不会抽枝发芽, 我们自然也就不去考虑生长出的枝叶是否满足我们需要的结论了.

此时, 一些考虑比较周全的读者大概会思考:

如果这棵归纳榕树会在某些地方停止生长，那么我们怎么确定会不会有如空中楼阁般存在的满足性质 p 的情况呢？回到严谨的数学陈述，我们固然知道所有简单图都可以由完全图删边衍生而来，但又怎么知道所有满足 p 的图都能经过这样的衍生得到呢？会不会有的满足 p 的图删掉一条边后不满足 p 从而无需考虑，但再删第二条边后就又满足 p 了，而这时的情况具有性质 q 是没法用如上归纳递推证明的呢？

这里，发挥作用的是所谓"性质 $\not p$ 的继承"．图 G 如果满足 p"删去任何点集后奇片个数不超过所删点个数"，那么加新边后也满足 p（这一具体的图论命题请读者自行证明）．把它用逆否命题说一遍就是：一图 G 如果不满足性质 p，那么它删去一边后也不满足 p（归纳可知若干次删边后决不满足 p，从而比 G "简单"的图都不满足 p）．我们的归纳榕树既然以完全图为根，以减边为生长，那么以上论断即是在说：它一旦生长到不满足 p 处即枯死，而枯死之上决不新生．书给证明形式上的证明结构，不妨称作"有条件的归纳原理"，而这一结构能够成立的一个充分条件，是我们的性质 p 的否定 $\not p$ 必须要在衍生中继承．

如果读者已经理解了这一证明战略，剩下的就是战术问题了．书给证明的主题内容，也是在宣明了自己的归纳思路后，主要证明归纳递推性质 q 的过程的确成立．而这对如今的读者来说，想必不过是又一道普通的图论题目罢了．

题解

1.

组合基础知识, 略.

2.

反证法: 若存在至少两个不同的完备匹配, 任取其中两个作不交并 (异或) , 所得边集为若干圈之并, 可反推出原图有圈, 矛盾.

3.

k 为偶数: K_{k+1}.

k 为奇数: 从一个点出发衍生出 $k-1$ 个点, 这 $k-1$ 个点均有 $\frac{k-1}{2}$ 条环边.

4.

读者可以想象, 这一游戏结束时的场景将是: 一方选择了一个点后, 所有与之相邻的点都被选择过, 从而另一方无处可走, 败给第一方. 由于图的有限性, 游戏必定在有限步后结束, 故而当一个算法保证一方始终有点可选时, 算法必定以另一方的落败为结束. 因此必胜策略的要义在于指出: 无论过去的选择如何, 无论对方此刻怎么选择, 我方接下来都有与之相邻的点尚未被选择从而尚可以选择 (而不必纠结于取胜那一步的场景如何) . 那么匹配的思想在这里很适用.

由于必要性的情况十分显然, 我们先考虑必要性 (尽管它的陈述并不直接) .

必要性: 运用反证法: 假设 G 中有完备匹配 M, 证明先手无必胜策略.

为了证明这一点, 我们将给出一个后手的必胜策略. 显然, 当后手始终执行这个必胜策略时, 先手无法获胜, 故先手不存在任何必胜策略: 无论先手选哪个点 v, 后手下一步都选择被 M 许配给 v 的点 u 即可.

充分性: 我们给出一个先手的必胜策略:

G 中无完备匹配, 设 G 的最大匹配为 M, 即知 G 中存在不被 M 匹配的点.

先手第一步任取一个不被 M 匹配的点 v_0. 与 v_0 相邻的点一定都被许配 (否则未被许配的点 u 与 v_0 所连的边可以加进 M 中, 与 M 的最大性矛盾) , 故无论后手选择哪个与 v_0 相邻的点作为 v_1, 先手都可以选择 v_1 被 M 许配的点 v_2.

此后, 每当后手进行选择, 如果他可以选到一个未被 M 许配的点 v_{2n+1}, 那么 $v_0v_1v_2...v_{2n+1}$ 构成一条可增广轨道, 与 M 的最大性矛盾. 故后手能选择的一定是被 M 许配的点, 此时先手再选择 M 许配给该点的点即可.

p.s.

请读者注意证明必要性时的目标转换: 用证明后手有必胜策略来推出先手无必胜策略. 仅从形式上看, 这是一个等价变换还是有风险的加强? 看起来好像是后者, 毕竟先手无必胜策略似乎不是后手有必胜策略的充分条件 (它当然是必要条件) . 然而, 博弈论中的策梅洛定理告诉我们:

信息公开的无随机因素的二人的有限博弈, 或者一方有必胜策略, 或者两方均有必不败策略.

(假如游戏规则下不存在平局的情况, 显然可以表述为“必有一方有必胜策略”.)

在本题的案例中, 当图 G 本身已经被确定, 这显然是一个信息公开的无随机因素的博弈. 它也显然是一个二人博弈. 由于图的有限性且游戏每进行一步都会是一个点不再能被选取, 它又是一个有限博弈. 最后, 如规则所言, 它不允许平局的情况. 故而我们可以放心地断言: “先手有必胜策略”的否定正是“后手有必胜策略”.

最后关于策梅洛定理闲聊几句：其详细证明过程不会在此展示，但读者可以依据正文前的解析直观地感受一下它为什么成立．另外，读者也可以试着举五个反例，以说明为什么定理中的五个条件 (加粗的部分) 缺一不可．

5.

“1 度因子”等价于“完备匹配”, 从而“可 1 度因子分解”等价于“存在若干彼此不重的完备匹配, 它们的并恰为全图所有的边”.

(1).

K_{2n}: 请参考后文题 6.12 的解答. 基于其本题的解答近乎平凡.

$K_{n,n}$: 构造一个 1 度因子分解方案如下:

将 Kn, n 中的所有点编号为 $x_1, x_2, ..., x_n$ 与 $y_1, y_2, ..., y_n$.

$x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n$ 为 $K_{n,n}$ 的一个完备匹配.

此后, 保持匹配中每一对中的 x 不变, 每次使 y 的下标增加 1, 即可得到一个新的完备匹配, 且这些完备匹配彼此不重. 由此即可得到 n 个不重的完备匹配. 它们即构成一个 1 度因子分解方案.

(2).

先证 Peterson 图中每一个完备匹配都是同构的: 删去这个完备匹配后剩下的边构成两个长为 5 的不连通的圈.

再任取一个完备匹配, 说明删去它后剩下的边无法分解成不交完备匹配的并. 即证.

6.

考虑一个 8*8 的正方形棋盘的每个格子的坐标 (不妨命名为 $(1,1),(2,2),...,(8,8)$) , 不难证明两个格子相邻 (即“能够被一个 $1*2$ 的长方形覆盖”) 的一个必

要条件是: 两个格子各自的坐标中两数之和奇偶性不同. 根据这一特征, 我们先将格子划分为两个等价类 (等同于国际象棋棋盘中的黑格与白格) .

以格子为点作图 G, 两点相邻当且仅当它们所对应的正方形格子在棋盘中相邻. 由上文知这是一个二分图.

显然, 所删去的对角的两个正方形属于同一个等价类. 由 Hall 定理的近乎平凡的推论知, 删去这两个点后的图 G 不存在完备匹配. 从而所要求的方案不存在.

7.

证明:

必要性:

如果 S 为 X 或 Y 的子集, 与 Hall 定理中必要性的证明基本相同; 如果 S 同时含有 X 与 Y 的部分, 那么 $N(S\cap X)$ 与 $N(S\cap Y)$ 显然分别包含于 Y 与 X 从而不交. 加和即可.

充分性:

由条件易得 $|X|=|Y|$.

由条件, 考虑 Y, Y 本身便符合 Hall 定理的使用条件. 由 Hall 定理的充分性知, G 中存在将 Y 中点都许配的匹配, 而这也必然是 G 的完备匹配.

追问:

不成立, K_3 显然构成反例.

8.

(1).

注意到 k 次正则二分图删去一个完备匹配 (一个 1 度因子) 后即成为一个 $k-1$ 次正则二分图, 从而这道题很适合用归纳法.

使用归纳法. 由推论 5.1 知 k 次正则二分图存在完备匹配. 其余略.

(2).

由题 1.9 知, 每个点度数都为 2 的图可表示为若干不交圈之并. 因而类似 (1), "可 2 度因子分解"等价于"存在若干组彼此无公共边的圈, 且每一组内部的所有圈无公共点, 这些组的并恰为全图所有的边".

由第 6 章知识知, 一个所有点度数都为偶数的图必有 Eular 回路. 我们任取 $2k$ 次正则图 G 的一个 Eular 回路 P.

现在我们作一个新的 2 分图 G^*, 其 X 与 Y 中均恰有 $v(G)$ 个点. 如果 P 中出现了 $v_i - v_j$ 这条边且 v_j 出现在 v_i 之后, 我们便在 G^* 的 x_i 与 v_j 间连一条边. 由此, G^* 将是一个 k 次正则二分图. 由 (1), G^* 是可 1 度因子分解的.

现在我们任取 G^* 的一个 1 度因子分解方案, 然后将 G^* 中的 x_i 与 y_i 重叠成一个点 v_i 并保留原有的边关系, 则我们再次得到了 G. 此时 G^* 的 1 度因子分解方案便成为了 G 的 2 度因子分解方案.

9.

以每一行或每一列为点作 (二分) 图 G, 两点之间连边当且仅当矩阵中该行该列的值为 1.

所求证即为 König-Egerváry 定理.

10.

注意到 $A - P_k$ 即得到题目条件改为 $k-1$ 时的所给矩阵. 那么这道题很适合使用数学归纳法.

类似第 9 题的思路, 我们可以将题目的对象转换为一个二分图 G, 一行与一列分别对应 X 与 Y 中的一个点. 则题目变为:

给定二分图 G. G 满足 $V(X) \geq V(Y)$, 且 X 中的点度数均为 k, 而 Y 中的点度数均不大于 k. 求证: 可以给定 G 的 k 个不重的匹配方案, 使得每个匹配方案均把 X 中的点完备匹配.

11.

首先要意识到到取 $S = \emptyset$, 则 $|S| - |N(S)| = 0$, 从而始终有 $max \geq 0$, 所以不用担心溢出的情况.

用 K-E 定理证明即可.

12.

K-E 定理断言了二分图的最大匹配等于最小覆盖. 我们用其证明 Hall 定理时, 适合从"最大匹配是否是完备匹配"这种问法入手.

必要性 (有完备匹配 $\rightarrow$ ($S \subseteq X \rightarrow |N(S)| \geq |S|$)) :

Hall 定理的必要性是平凡的. 原来该怎么证还怎么证.

充分性 (($S \subseteq X \rightarrow |N(S)| \geq |S|$) $\rightarrow$ 有完备匹配) :

我很想把这段解答略过去... 但考虑到 11 题已经略了一次这里还是不要略了.

X 本身便是 G 的一个覆盖, 如果它是最小覆盖, 那么最大匹配的边数也为 $|X|$, 从而显然是将 X 完全许配的匹配. 下面我们致力于证明没有比 X 更小的覆盖.

如果存在一个覆盖 C 比 X 更小, 那么它必然缺少了 X 中的一部分点, 同时它会有 Y 中的一些点 (为了泛用, 这"一些点"也考虑到没有点的情况) . 对于那些不在 C 中的 x_i, 它们的边必须由 C 中 Y 内的点盖住. 我们已

经有 $|C| = |C \cap X| + |C \cap Y|$, 如果 $|C \cap Y| < |X| - |C \cap X|$ (这是保证 C 优于 X 的前提) , 取 $S = X/(C \cap X)$, 则由前文知 $N(S) \subseteq C \cap Y$ 从而 $|N(S)| \leq |C \cap Y| < |X| - |C \cap X| = |X/(C \cap X)|$. 矛盾.

13.

必要性:

同上.

充分性:

无法理解, 它们的条件和结论之间有什么联系吗.

14.

'

15.

必要性: 略.

充分性:

对树的顶点数量使用归纳法:

删去 v 后恰有一个奇片, 由于原图 T 是树, 显然 v 只能与每个残片中的一个点连通. 我们将 v 与那个奇片中与之相邻的点匹配. 剩下的所有残片都是偶树, 且都满足条件 (如果某个残片偶树 T'_i 有一个点 u 删去后会在 T'_i 中产生多于 1 个奇片, 则在原图 T 中删去 u 显然也会产生等量的奇片.)

16.

trivial.

17.

‘

18.

用类似题 5.6 的方式用二分图描述棋盘, 然后用题 5.8.(1) 的结论证明该图可以 1 度因子分解.

19.

‘

20.

‘

6 Eular 图与 Hamilton 图

笔记

定理 6.4

*

定理 6.5 (Dirac 定理)

*

题解

1.

略.

2.

存在. 举例如下:

picture

(如要求不能有环或重边, 在现有的环或重边上加偶数个点即可.)

3.

注意到, 若允许 G 不为连通图, 所给命题实际上并没有被加强: G 的每个连通片奇度顶点个数必仍为偶数, 一条行迹也不会跨越超过一个连通片; 故对每个连通片单独考虑即可. (类似于前文我们对定理 1.2 的处理.)

下面我们证明所给命题对所有连通图与非连通图成立, 使用数学归纳法:

(1) $k=1$: 由条件可推出 G 中存在 Eular 迹. 易验证 Eular 迹即为所求;

(2) 若命题在 $k=i$ 时成立, 则当 $k=i+1$:

任取 G 中同一个连通片中两个奇度顶点, 它们之间的最短路径显然是边不重的行迹. 取这条边作为 P_{i+1}, 删掉. 易验证此时情况回到 $k=i$ 的情况.

p.s.

在 (2) 的"验证"中, 一份完整的解答应证明所得新图依旧具有 $k=i$ 下题目给出的全部条件.

4.

trivial, 略.

5.

同上.

6.

(1). 正确. 证明使用反证法:

Eular 回路使用每一条边恰好一次, 而每次走过一条边会使得回路的终点所属的等价类发生变化. 若 G 中有奇数条边, 起点与终点所属的等价类将会不同, 与“回路”矛盾.

(2). 错误. 反例如下:

pictrue

7.

如果 G 是 Eular 图, 使用书上的算法求出 Eular 回路, 所得的输出即可作为要求的 Eular 迹.

反之, 由推论 6.1 知 G 中恰有两个奇度顶点 (不妨称为 v, u).

连接 uv 得到新图 G'. 求出 G' 的 Eular 回路, 再在这一输出中删去边 uv 即得到要求的 Eular 迹.

8.

t, 略.

9.

证明: 类似题 6.6.(1) 的证明, 考虑“来回”即可.

追问:

由此定理知, 否.

10.

(1). 删去某 5 个顶点后得到 7 个连通片.

(2). 删去某 6 个顶点后得到 7 个连通片.

11.

略.

12.

这道题是教材中为数不多的本解答作者没有独立做出来的题目之一. 由于作者搜到的它的解答只给了一个颇为精彩的构造方案, 而没有说明做题思路, 这里我们会尽可能平稳地解释如何得到这样一个思路, 以降低读者所需的洞见量.

由于一个 Hamilton 圈 (下简称“H 圈”) 需要恰好 n 条边. 从 $e(K_n)$ 可以得出: 无重 H 圈数的一个上界是 $\lfloor\frac{n(n-1)}{2n}\rfloor=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$. 更具体地, 对于奇数 n, 它是 $\frac{n-1}{2}$; 对于偶数, 它是 $\frac{n-2}{2}$.

下面, 出于某种不可言说的信心, 我们试图证明这个上界是可以达到的:

我们命名 K_n 的 n 个顶点为 $1,2,...,n$.

我们先注意到, 如果 $i_1-i_2-...-i_n-i_1$ (这里有 $i_1,i_2,...,i_n=1,2,...,n$) 是一条 H 圈, 则将所有顶点的编号加 1 (显然要对 n 取 mod) , 所得的新圈依然是 H 圈. 这是一个不可多得的可以批量构造 H 圈的思路 (相比之下, $1-2-...-n-1$ 这种 H 圈几乎没有可复制性) . 唯一美中不足的是: 仅凭此我们无法保证这些 H 圈无重边. 下面我们开始考虑给 i_j 的分布添加性质, 使得这些 H 圈尽可能不重.

刚才的取模给我们以启发: 如果这个 H 圈的各个边的顶点编号之差对 n 取模后各不相同, 给这些编号加 1 后, 所用新边与原边相同的机会便会减小. 比如, 如果这个 H 圈中有 $1-2$ 这条边, 且它没有再用到其它的顶点编号差 mod$n$ 余 1 的边, 那么此后的 H 圈中用到的 $2-3,3-4,...,n-1$ 都不会被重复使用. 而一个数 mod$n$ 恰好有 n 个等价类 (希望读者还没有忘记代数结构课程中的数论知识) , 一个 H 圈也正需要 n 条边, 实在是太契合了!

看上去这个思路很吸引人, 我们现在开始核查一些细节问题. 不幸的是, 我们的确发现两个无法解决的问题:

(1) 一个 H 圈中相邻的两个点无法做到编号差 mod$n$ 为 0, 毕竟它们总不能是同一个点;

(2) 边是无向的, 边 $a-b$ 与 $b-a$ 无法区分. 所以编号差 mod$n$ 大于 $\frac{n}{2}$ 的点对实际上没有意义;

有一个付出一半代价的方法可以解决这个问题 (这也正契合了文初我们给出的 $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ 这一上界) :

在每条 H 圈中, 我们使用编号差 mod$n$ 余 k 的边两次. 这样我们可以生产出的 H 圈数量大概会减半, 但至少可以规避上述问题.

现在我们来开始构造作为底本的数列 i_j: 由于现在各点还有对称性, 我们选

择 1 作为 i_1. 此后为了满足规避相同的邻点编号差, 我们选择 2 作为 i_2, 4 作为 i_3, 7 作为 i_4, 超出 n 的时候就对 n 取 mod... 写到这里我们又发现一个问题: 如果两个点的编号对 n 取 mod 后重合了怎么办? 比如在 $n = 6$ 的情况里, 作为 i_1 的 1 和作为 i_4 的 7 实际上是同一个点, 而我们甚至还没有构造完一个 H 圈呢!

这时, 作者搜到的答案给了一个妙不可言的解决思路:

在取编号差的时候, 我们不是始终往同一个方向取, 而是间隔着往相反方向取. 例如: 在取了 $1-2$ 后, 我们为了添上一条编号差为 2 的边, 不取 $2-4$, 而是取 $2-n$. 由此, 我们得到的 Hamilton 圈为 (先考虑比较契合的 n 为偶数的情况) :

(请读者自行跟着在草稿纸上作图: 将名为 $1-n$ 的点围成一圈, 并根据这一算法连边.)

$1--2--n--3--(n-1)--4--...--n/2--(n/2+2)--(n/2+1)--1$

不难理解, 这样的连法可以保证不重不漏地遍历 K_n 中所有的点. 现在我们任取一个偶数 n, 验证一下我们的批量生产方案是否可行:

取 $n = 2$, H 圈数目为 0, 平凡;

取 $n = 4$, 则所得 H 圈为 $1-2-4-3-1$, 也的确只需这一个 H 圈;

取 $n = 6$, 则所得 H 圈为 $1-2-6-3-5-4-1$, 全体加 1 后得到 $2-3-1-4-6-5-2$;

注意到这里 $1-4$ 边被用了两次, 不符合我们对“无重”的要求. 如果全体加 1 不行, 减 1 行不行呢? 读者试一下就会发现也是不行的. 其实这也在预料之中: 全体减 1 后, 重复出现的不过是原先那条加 1 后与 $1-4$ 重合的边 $3-6$ 罢了.

尝试过 $n = 8$ 等情况, 我们发现这个问题是普遍存在的: $1-(\frac{n}{2}+1)$ 与 $(\frac{n}{2})-n$ 中始终会有一个在第一个 H 圈与最后一个 H 圈中被重复使用.

这是否说明我们对 n 为偶数的情况的判断过于乐观了呢? 我们暂且按下不表, 来看奇数的情况: 我们仿照上文的做法连出一条 H 圈, 在复制的过程中也发现 $1-\frac{n+3}{2}$ 与 $\frac{n-1}{2}-n$ 这两条边总会被重复使用. 但我们也知道, n 为

奇数的情况下, K_n 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边, 是足够做出 $\frac{n-1}{2}$ 条 H 圈的. 有没有办法优化我们制作圈的方案呢?

这里我们换一种思路, 当 n 为奇数 $2k+1$ 时, 我们不再考虑单独的构造方法, 而是试图在 $n=2k$ 的基础上改动方案. $n=2k$ 时, 我们将点 1 $2n$ 排成一周, 通过上文的连接方法得到了一个作为底本的 H 圈. 现在我们试图据此改造出一个合理的构造方案, 既能解决偶数情况的问题, 又能增加一条 H 圈.

现在我们把 $1-(\frac{n}{2}+1)$ 也就是 $1-(k+1)$ 这条边打破, 将 1 与 $k+1$ 均与 $2k+1$ 连边, 由此得到的的确是一个从长为 $2k+1$ 的 H 圈. 精彩的是: 当我们保持 $2k+1$ 不变, 将所有其余顶点的编号每次同时 $\mathrm{mod}2k$ 同余加 1, 我们总能得到另一个 H 圈, 而且这些 H 圈巧妙地利用上了 K_{2k+1} 相比于 K_2k 增加的每一条关联 $2k+1$ 的边! 最后更加完美的是, 由于 $2k+1$ 的插入, $1-(k+1)$ 与 $k-2k$ 不再会出现两次, 解决了偶数情况的问题. 至此, 我们已经给出了在 K_{2k+1} 中构造出 k 个 H 圈的方案:

$1--2--2k--3--(2k-1)--4--...--k--(k+2)--(k+1)--(2k+1)--1.$

容易验证这是一个 H 圈.

此后, 我们保持 $2k+1$ 不变, 每次将其余点的编号 $\mathrm{mod}2k$ 同余加 1, 直到得到 k 个圈. 可以验证这是 k 个无重的 H 圈.

现在再回过头来看偶数的情况, 即便我们还没有办法修改原先的方案, 但上述“从 $2k$ 到 $2k+1$”的优化给了我们启发: 我们可以类似地将 $2k+1$ 优化成 $2k+2$, 而优化的关键便在于在 $k--2k$ 这另一条“直径”中插固定点, 以保证与 $2k+2$ 关联的边得到充分利用. 请读者尝试自行给出 n 为偶数时的构造方案的描述.

13.

题目可以被转换为如下图论情况: 图 G 满足 $v = 2n, \delta \geq n$, 求证 G 中存在 Hamilton 圈.

使用 Dirac 定理即可.

14.

Dirac 定理.

15.

'

16.

证明思路和题 6.9 中的命题几乎完全一样.

17.

(1).

我们使用归纳原理:

归纳定义所有的 $e = \frac{(v-1)(v-2)}{2} + 2$ 的图:

(1) 在 K_{v-1} 外新建一个点 v_v, 将其与 K_{v-1} 中的任意两个点 v_i, v_j 连边, 所得图 G 满足等式;

(2) 若 G 满足等式, 将任一条边 $v_i - v_j$ 修改为 $v_i - v_k$, 所得新图 G' 依然满足等式.

下面我们用归纳原理证明:

(1) 任选 K_{v-1} 的一个 Hamilton 圈, 将 v_v 插入 v_i 与 v_j 中即得;

(2) G 中的 Hamilton 圈如果未被破坏, 继承即可; 如果被破坏, G 中的 Hamilton 圈在 G' 中至少会剩下一条 Hamilton 轨道. 考虑 G 中除 v_i, v_j 以外的 $v-2$ 个顶点, 它们之间即使完全连边也只能占用 $\frac{(v-2)(v-3)}{2}$ 条. 再排除这一 Hamilton 轨道中 v_i 和 v_j 关联的边, 整张图还剩下 $v-2$ 条边. 而 v_i 与 v_j 之间又没有边, 故这 $n-2$ 条边必然在 v_i, v_j 与其它顶点之间连出. 此后略.

(2). 在 K_{v-1} 外新建一个点, 这次只将该点与 K_{v-1} 中恰一个点连一条边即可. 由于新加的边是桥, Hamilton 圈无法在其连接的两部分间跨越超过一次, 但又要经过所有的点, 必然与"首尾相同"的条件矛盾. 所以不存在 Hamilton 圈.

18.

等价于证 C 上有 G 的所有点.

如果 C 上没有 G 的所有点, 那么 C 上至少有一个点 v_i 与 C 外的某点 u 相邻. 从这个点出发可以找到一条贯穿 C 中所有点直到 v_{i-1} 的轨道, 长度等同于 C 的长度, 比 C 删去一条边后更长. 矛盾.

19.

'

20.

‘

附录 1 归纳原理

在讲解归纳原理之前, 我们先来回顾两个知识点.

其一是大部分读者在高中时期大概就已熟悉的数学归纳法 (下简称“归纳法”) , 可以被用来证明全体自然数满足一个性质:

对于一个关于自然数的命题 p, 如果有:

(1) $p(0)$ 成立;

(2) $\forall i \in N$, 有: 若 $p(i)$ 成立, 则 $p(i+1)$ 成立.

则有:

$\forall i \in N, p(i)$ 成立.

归纳法在高中常出现在“已知数列递推公式, 求或求证其通项公式”等题目中. 在面对这类题目时, 如果已经知道了正确的通项公式, 就可以根据上一项的值递推出下一项的值. 显然, 使用归纳法求解问题, 往往需要我们 (无论通过什么手段) 已知正确的结论, 而所做的仅是在逻辑上严格证明这一结论.

要运用归纳法证明命题, 那么自然需要先确保归纳法本身的正确性 (就好比反证法的正确性源于原命题与逆否命题的等价性) .

然而, 尽管归纳法十分显然且符合直观理解, 但其严格证明 (或者说其正确性的保证) 在高中阶段的学习往往是不被提及的. 部分老师会倾向于使用类似“第一块多米诺骨牌倒下后, 所有的多米诺骨牌都会倒下”的比喻来给出一个直观的证明, 显然这尽管有助于理解与接受, 却有悖于我们对形式化的追求.

在今后数理逻辑的课程中我们将会学到: 归纳法本身并不是可以证明的定理, 而是作为自然数的皮亚诺定义一部分 (皮亚诺第五公理) 被提出的. (“不是自然数决定了归纳法, 而是归纳法定义了自然数.”) 限于主题与篇幅, 我们不打算在此详细探讨归纳法在定义自然数中的必要性及其历史渊源. 感兴趣的读者请自行查找相关资料或学习初步的数理逻辑课程. 此时读者只需

对“我们尚未严格学习归纳法”这一现况有印象就行.

其二是代数结构课上我们学过的归纳定义:

如果我们想要定义一个集合 X, 最直接的办法无疑是直接列举 X 中的所有元素. 但显然, 列举法无法定义任何无限集, 即便是对于很多有限集来说它也不是最方便或最能够直接体现集合中元素的性质的方法. 为了面对这类情况, 我们可以采用归纳定义的方法:

以下描述构成对一个集合 X 的定义:

(1) (基础语句) 给定一个 (通常是列举出的或已有的) 集合 X_0, 有 $\forall x \in X_0, x \in X$;

(2) (归纳语句) $\forall x_1, x_2, ..., x_i, ... \in X$, 有:

(2.1) $f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), ..., f_{1j}(x_1), ... \in X$;

(2.2) $f_{21}(x_1, x_2), f22(x_1, x_2), ..., f_{2j}(x_1, x_2)... \in X$;

...

(2.i) $f_{i1}(x_1, x_2, ..., x_i), f_{i2}(x_1, x_2, ..., x_i), ..., f_{ij}(x_1, x_2, ..., x_i)... \in X$;

...

(其中, f_{ij} 均为从一个有序 i 元组到一个元素的映射)

(3) (终结语句) 此外无它.

上述给出的归纳定义通式看似非常抽象, 实则是因为我们要照顾到所有的情况 (而不仅限于常见的, 仅有一两种从一两个元素出发进行衍生的情况) . 如果读者读到这里尚没有回想起归纳定义的核心思想, 请去复习代数结构的内容, 或直接配合下文中的实例理解.

下面, 我们正式进入归纳法的讲解: 我们先仿照归纳法的固定格式, 给出归

纳定义证明一个命题的格式:

对于一个归纳定义出的集合 X, 及一个关于 X 中元素的性质 p, 如果有:

(1) $\forall x \in X_0$, $p(x)$ 成立.

(2) 对于 X 的归纳定义中的归纳语句给出的所有映射 (衍生映射), 如果原像这一有序 i 元组中的所有元素 x_i 都有 $p(x_i)$ 成立, 则像 f 同样有 $p(f)$ 成立;

则有:

$\forall x \in X$, $p(x)$ 成立.

在讨论归纳原理的正确性前, 让我们先感性地直观体会一下归纳原理背后的洞见是什么: 如果说自然数是每块多米诺骨牌背后恰有一块多米诺骨牌, 那么归纳定义出的集合中的元素背后可能有多块多米诺骨牌; 如果说归纳法的证明结构是链式的, 那么归纳原理的结构就是树状的. 然而这所谓“树”又并非真的完全等同于图论中的有根树, 而是更接近现实中的榕树—-归纳定义出的元素完全可能有多种衍生路径 (参考正则图的归纳定义) . 只不过这并不影响归纳原理对命题的证明就是了.

与归纳法不同的是, 归纳原理并非是某个定义或公理, 而是可以证明的定理. 证明的关键在于归纳定义中的终结语句“此外无它”, 正是它决定了“一切衍生方法保持性质 p”蕴含“x 满足性质 p”. 相比之下, 定义自然数的皮亚诺公理中则没有类似的论断.

仅仅是看过了格式显然不足以学习, 我们还需要具体的例子以辅助体会. 本解答正文中运用归纳原理解题的例子已有很多, 这里我们只再举一个图论之外的例子 (也是一个数理逻辑中的例子, 引自郝兆宽等所著《数理逻辑–证明及其限度》) :

我们有对于命题逻辑语言中“合式公式”这一概念的归纳定义如下:

命题逻辑语言中全体合式公式的集合是满足以下条件的表达式的最小集合:

(1) 每个命题符号 A_i 都是合式公式;

(2) 如果 α 和 β 都是合式公式, 则 $(\neg\alpha)$, $(\alpha\wedge\beta), (\alpha\vee\beta), (\alpha\to\beta), (\alpha\leftrightarrow\beta)$ 也是合式公式;

(3) 此外无它.

证明*: 每一合式公式中左右括号数目相同. 且每一合式公式的任一真前段中左括号多于右括号.*

第一个命题证明如下:

称"左右括号数目相同"为性质 p. 下面我们使用归纳原理:

(1) 对于任意命题符号 A_i, 其既没有左括号也没有右括号. $p(A_i)$ 成立;

(2) 若对于合式公式 α 与 β, $p(\alpha)$ 与 $p(\beta)$ 均成立:

$(\neq\alpha)$ 与 $(\alpha\star\beta)$ 均保留了 α 与 β 的所有括号, 且仅额外添加了一对括号, 故 p 依然成立. 根据归纳原理, p 对所有合式公式成立.

第二个命题的证明内容上完全类似. 形式化的书写, 就留给读者作为趁热打火的练习.

(直观地认识到了归纳原理的运用后, 作为中场休息, 我们来思考一个有趣的问题: 对于一个归纳定义出的集合 X 与一个性质 p, 如果我们验证了 X 的两种衍生方式中, 方式 (1) 保持 p 性质, 但方式 (2) 并不总是保持 p 性质, 我们能够确定对于多少的 (哪些的) x, 总有 $p(x)$ 成立?

直观的答案是: 我们只能确定对于一部分 x, $p(x)$ 成立. 这个说法固然正确, 但并不能反映所有直观印象. 更深刻的论断是: 除了一部分占比极少的, 特殊得近乎平凡的 x, 我们几乎完全无法确定 $p(x)$ 成立!)