

# 高维情形下线性模型的泛化误差研究

第四周 (12.25-12.31) 工作

Yukun Dong

## 目录

任务:	1
修复 4.2 的 bug . . . . .	1
4.4 Limiting $l^2$ norm . . . . .	3

## 任务:

- 修复 4.2 的 bug;
- 复现 4.4;
- (optional) 复现 chapter5。

### 修复 4.2 的 bug

可以确定的是，文章有两处少打了一个  $c_0$ ，在我做出改动之后， $\gamma > 1$  的情形模拟正确， $\gamma < 1$  的情形模拟失败。后来发现作者发表的时候删掉了相关内容，以下内容均是参看发表的文章。事实上，新的文章在这一板块强调了  $\gamma > 1$ 。

任务:

2

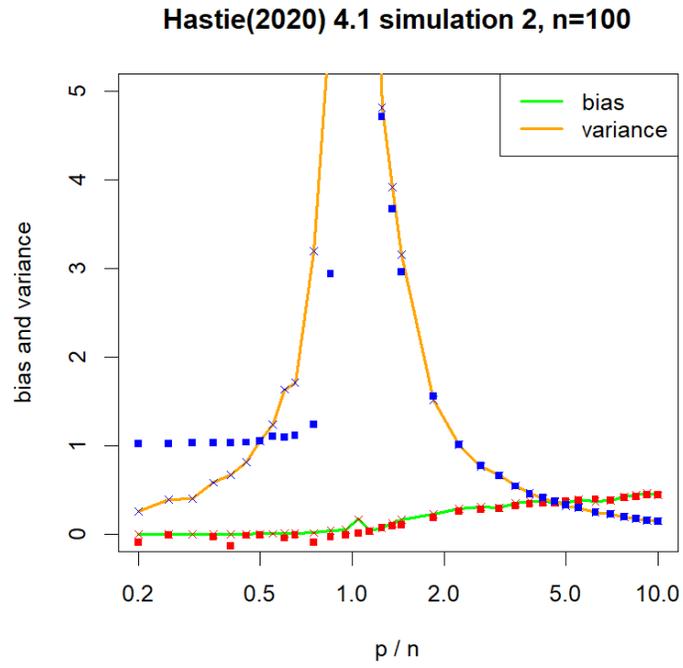


图 1:  $\gamma > 1$  的时候模拟成功

Hastie(2020) 4.1 simulation 4(correlated features), n=1

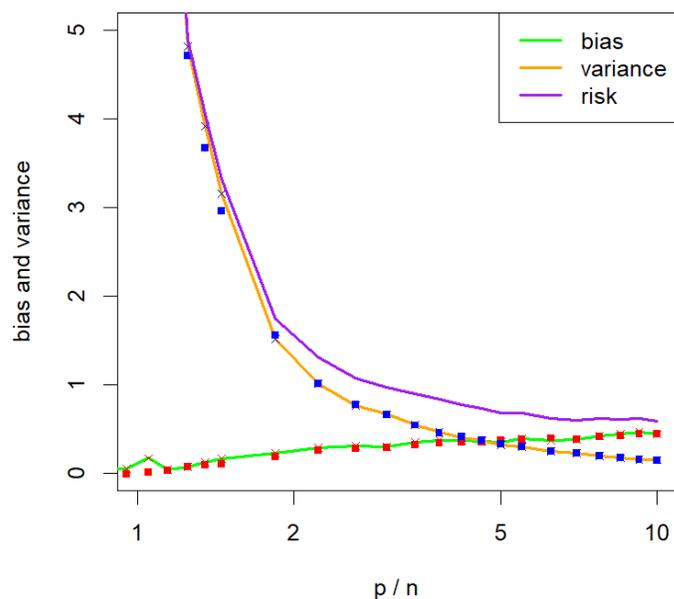


图 2: 图中显示, risk 在 0.6 左右渐进

#### 4.4 Limiting $l^2$ norm

**Corollary 3.** Assume the conditions of Theorem 3. Then as  $n, p \rightarrow \infty$ , such that  $p/n \rightarrow \gamma$ , the squared  $\ell_2$  norm of the min-norm least squares estimator (4) satisfies, almost surely,

$$\mathbb{E}[\|\hat{\beta}\|_2^2 | X] \rightarrow \begin{cases} r^2 + \sigma^2 \gamma m(0) & \text{for } \gamma < 1, \\ r^2 \frac{1}{\gamma} + \sigma^2 \gamma m(0) & \text{for } \gamma > 1, \end{cases}$$

where we abbreviate  $m = m_{F_{H,\gamma}}$  for the Stieltjes transform of empirical spectral distribution  $F_{H,\gamma}$ , and we write  $m(0)$  to denote  $m(0) = \lim_{z \rightarrow 0^+} m(-z)$ , which exists under our assumptions.

图 3: Corollary 3

问题: 新版里面的  $m(0)$  的求法涉及到 Stieltjes transform, 暂时还没有找到算法。这里用的是老版论文里面的公式。

这一次的模拟和预印本的理论结果是吻合的, 对于新版的表达还有待研究。

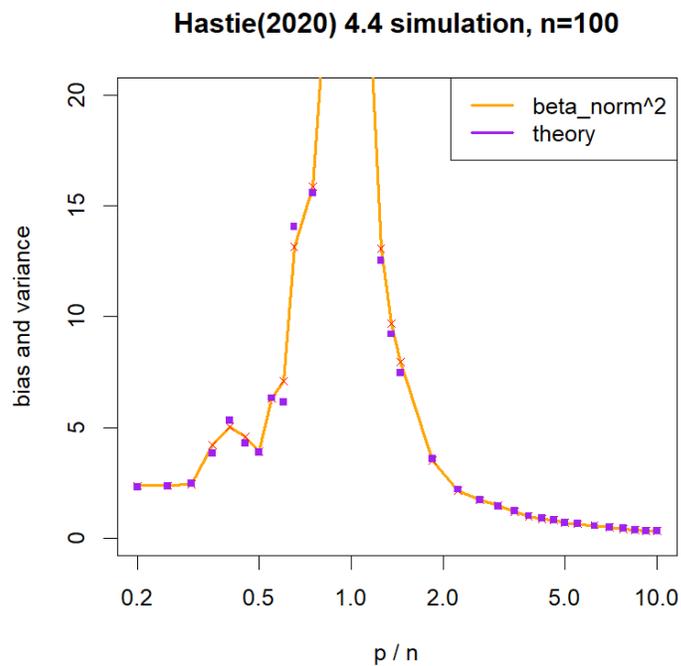


图 4: 4.4 simulation

这是旧版文章的公式，可见旧版的结果是对的，而新版把表达式简化到了只含有  $m(0)$  这一项。因此后续有待验证这两种表达的等价性。

**Corollary 3.** Under the assumptions of Theorem 3, further assume  $\|\beta\|^2 \rightarrow r^2$ , and let  $c_0 = c_0(H, \gamma)$  be defined as there. Then as  $n, p \rightarrow \infty$ , such that  $p/n \rightarrow \gamma$ , the min-norm least squares estimator (4) satisfies, almost surely,

$$\|\hat{\beta}\|_2^2 \rightarrow \begin{cases} r^2 + \sigma^2 \frac{\gamma}{1-\gamma} \int \frac{1}{s} dH(s) & \text{for } \gamma < 1, \\ \int \frac{c_0 \gamma s}{1 + c_0 \gamma s} dG(s) + c_0 \gamma \sigma^2 & \text{for } \gamma > 1, \end{cases} \quad (18)$$

图 5: Corollary 3(arxiv ver.)