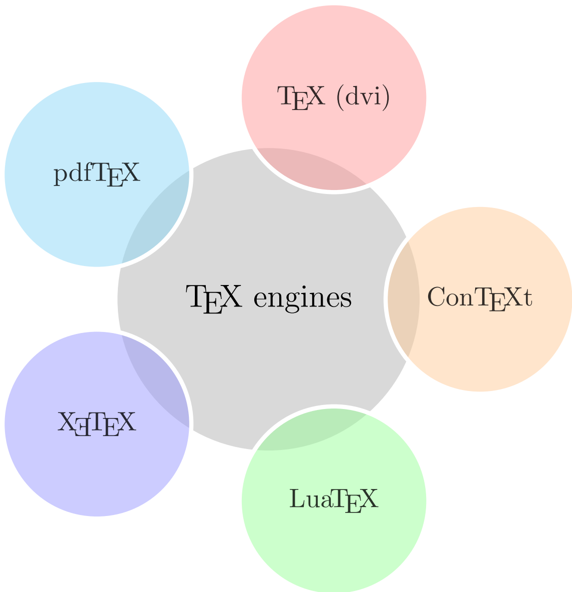
大二上学期复习笔记



adydio
dyk2021@mail.ustc.edu.cn
2022 年 12 月
中国科学技术大学

1 映射的微分

这一章很难，需要配合补充习题进行学习。重点有映射的微分，逆映射定理，隐映射定理和秩定理。

1.1 零碎的知识

定义 1 (**同胚**)**.** 设 $f : X \Rightarrow Y$ 是一一对应，若 f 和 f^{-1} 均连续，f 称为 C^0 同胚；若 f 和 f^{-1} 均为 C^1 映射，则称 f 为 C^1 同胚。

同胚具有一些性质：

- 同胚既是开映射又是闭映射，也就是说，它把开集映射到开集，把闭集映射到闭集。
- 两个同胚的空间具有相同的拓扑性质。例如，如果其中一个是紧空间，那么另外一个也是紧空间；如果其中一个是连通空间，那么另外一个也是连通空间，等等。然而，这不能推广到通过度量所定义的性质；如果两个度量空间是同胚的，那么仍然有可能其中一个是完备的，而另外一个不是。
- 同胚是一个等价关系。

以下是一些同胚的例子：

- 开区间 $(-1, 1)$ 与实直线 $\mathbb{R}$ 同胚。
- 当 $n \neq m$ 时，$\mathbb{R}^n$ 不与 $\mathbb{R}^m$ 同胚。
- 一个连续和双射但不是同胚的函数的例子，是把半开区间 $[0, 1)$ 缠绕到圆上的映射。在这个情况中，逆映射虽然存在，但不是连续的。

定义 2 (**线性变换与范数**)**.** 设 $L(X, Y)$ 为向量空间 X 到向量空间 Y 内的所有线性变换构成的集合，简记 $L(X, X)$ 为 $L(X)$。对于 $A \in L(X, Y)$ 的范数 $\| A \|$ 为所有数 $| A | \mathbf{x}$ 的上确界，这里 $\mathbf{x}$ 取遍 $\mathbb{R}^n$ 中所有 $| \mathbf{x} | \leq 1$ 的向量 $\mathbf{x}$。

此时，不等式

$$| A\mathbf{x} | \leq \| A \| \, | x |$$

成立。还有以下几个事实：

定理 1.1. (a) 若 $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$，则 $\| A \| < \infty$ 且 A 为 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一致连续映射。
(b) 若 $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$，c 为一标量，那么

$$\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|, \| cA \| = | c | \, \| A \| .$$

(c) 若 $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$，$B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$，则

$$\| BA \| \leq \| B \| \, \| A \| .$$

结合课本上的 **Thm17.2**，再重复一遍结论：

定理 1.2. 设 Ω 为 $L(\mathbb{R}^n)$ 上可逆映射的集合，那么 Ω 为开集，且映射 $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{-1}$ 是 Ω 到自身的连续映射。

证明. 先证明若 $\| \mathcal{B} - \mathcal{A} \| \cdot \| \mathcal{A}^{-1} \| < 1$，则 $\mathcal{B} \in \Omega$。再由恒等式

$$\| \mathcal{B}^{-1} - \mathcal{A}^{-1} \| \leq \| \mathcal{B}^{-1} \| \cdot \| \mathcal{B} - \mathcal{A} \| \cdot \| \mathcal{A}^{-1} \|$$

控制即得结论。 □

定理 1.3 (压缩映射原理). 完备度量空间上的压缩映射有唯一的不动点。

需要注意度量空间的完备性。

引理 1 (微分中值定理对可微映射的推广). 设 f 是区间 $[a, b]$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续映射，且 f 在 (a, b) 上可微，那么存在 $t_0 \in (a, b)$ 使得

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a)|f'(t_0)|.$$

证明分两步：首先令 $z := f(b) - f(a) \neq 0$，构造函数 $\varphi(t) = \langle z, f(t) \rangle$，这样，$\varphi$ 就可以用微分中值定理。再由 $\varphi'(t) = \langle z, f'(t) \rangle$ 和柯西不等式 $|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|$ 即证。利用这个引理，可以证得下面的定理：

定理 1.4 (拟微分中值定理). 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的凸开集，$f : E \to \mathbb{R}^m$ 是可微映射，那么 $\forall x, y \in E$，存在 $\xi \in E$ 使得

$$|f(y) - f(x)| \leq \| \mathrm{d}f(\xi) \| \, |y - x| = \| Jf(\xi) \| \, |y - x|.$$

1.2 逆映射定理

引理 2. 设 f 是从 $\mathbb{R}^n$ 的开集 A 到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^1 映射，存在以 x^0 为中心的开球 $B_r(x^0) \subset A$，使得 f 限制在 $B_r(x^0)$ 上是单射。

引理 3. 映射 $g := f^{-1} : V \Rightarrow U$ 连续。其中，$V = B_{\frac{\lambda r}{2}}(y^0), \lambda = 1/(2 \parallel (Jf(x^0))^{-1} \parallel)$。

定理 1.5 (逆映射定理). 设 f 是从 $\mathbb{R}^n$ 的开集 A 到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^1 映射，如果 $x^0 \in A, d_{x^0}$ 可逆，$y^0 = f(x^0)$，那么存在 x^0 的的邻域 U 和 y^0 的邻域 V，$f : U \Rightarrow V$ 是 C^1 同胚。这表明存在定义在 V 上的连续映射 $g = f^{-1}$，且 $\mathrm{d}g_y = (\mathrm{d}f_{g(y)})^{-1}$。

定理 1.6. 如果 $\mathbf{f}$ 是开集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 内的 C^1 映射，$\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 在每个 $\mathbf{x} \in E$ 可逆，那么对于每个开集 $W \in E$，$\mathbf{f}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集。

1.3 隐映射定理

引理 4. 若 $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ 而 $\mathcal{A}_x$ 可逆，那么对每个 $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$，存在唯一的 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{0}$。$\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{k}$ 满足关系：

$$\mathbf{h} = -(\mathcal{A}_x)^{-1}\mathcal{A}_y\mathbf{k}.$$

定理 1.7. 设 $\mathbf{f}$ 是开集 $E \in \mathbb{R}^{n+m}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 内的 C^1 映射，在某一点 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E$ 使得 $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$，令 $\mathcal{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$，并且假定 $\mathcal{A}_x$ 可逆。那么存在开集 $U \in \mathbb{R}^{n+m}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U; W \in \mathbb{R}^m, \mathbf{b} \in W$，满足：
对于每个 $\mathbf{y} \in W$，有唯一的 $\mathbf{x}$，使得：

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U, \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

定义 $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$，则 $\mathbf{g}$ 是 W 到 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^1 映射，并且有：

$$\mathbf{g}'(\mathbf{b}) = -(\mathcal{A}_x)^{-1}\mathcal{A}_y.$$

1.4 秩定理

定理 1.8 (秩定理). 设 f 是 $\mathbb{R}^m$ 的开集 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^1 映射，f 在 M 上的秩为 r。设 $x_0 \in M$,$y^0 = f(x^0)$, 则存在 x_0 的邻域 U_1, y_0 的邻域 V_1, 以及 C^1 同胚 $\varphi : U_1 \Rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$，$C^1$ 同胚 $\psi : V_1 \Rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$，使得复合映射 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U \Rightarrow V$ 满足：

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (Id_r, 0).$$

1.5 条件极值

定义 3 (图). 设 $m<n$，考虑定义在开集 $U\subset\mathbb{R}^m$ 上的 $n-m$ 个 C^1 函数 $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-m}$。映射 $\Phi=(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-m}):U\to\mathbb{R}^{n-m}$ 定义了一个 $\mathbb{R}^n$ 上的一个子集合 $\Gamma(\Phi)=\{(x,\Phi(x))|x\in U\}$ 称为映射 Φ 的图。

定义 4 (曲面). 一个 $\mathbb{R}^n$ 上的一个子集 M 称为一个 m 维曲面是指对 $\forall x\in M$，存在 x 在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个邻域 V 使得 $M\cap V$ 可以表示为一个定义在 m 维开球 $U\in\mathbb{R}^m$ 上的 C^1 映射的图。

定理 1.9 (曲面的判定). W 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集，$F=(f_1,\dots,f_{n-m}):W\to\mathbb{R}^{m-n}$ 是 C^1 映射，映射 F 满秩。则当 $M=\{x\in W|F(x)=0\}$ 非空时，M 是 m 维曲面。

定义 5 (切空间). 设 $M\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 m 维曲面，$x^0\in M$。以下给出几种切空间的等价定义：

- $T_{x^0}M=\{(V,\mathrm{d}\Phi_{\tilde{x^0}}(v))|v\in\mathbb{R}^m\}$，其中 $\tilde{x^0}$ 为 x^0 前 m 个坐标的投影向量。
- $T_xM=\{v\in\mathbb{R}^n|\mathrm{d}F_x(v)=0\}$。
- $T_xS(f)=\{v\in\mathbb{R}^n|\langle v,\nabla f(x)\rangle=0\}$。$S(f)$ 为 f 的等值面。

下面讨论条件极值。设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 m 维曲面，我们关注定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开集上的函数 f 限制在 M 上时的极值问题。

定理 1.10. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集 W 内的一阶连续可微函数，M 是 W 内的 m 维曲面。设 $x^0\in M$ 是函数 $f|_M$ 的极值点，且 $\nabla f(x^0)\neq 0$，则

$$T_{x^0}M\subset T_{x^0}S(f),$$

其中，$S(f)$ 为 $f(x^0)$ 的等值面。

证明. x^0 是极值点就意味着 x^0 在任何一个 M 上过 x^0 的曲线上，都是极值点。取 $v\in T_{x^0}M$，$\gamma(t)$ 是 M 上的曲线，满足 $\gamma(0)=x^0,\gamma'(0)=v$。则单变量函数 $f\circ\gamma(t)$ 在 0 处取极值。那么

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\circ\gamma(t)|_{t=0}=\mathrm{d}f_{x^0}(v)=\langle\nabla f(x^0),v\rangle,$$

故 $v\in T_{x^0}S(f)$。 □

定理 1.11 (拉格朗日乘数法). 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集，f 是定义在 W 上的 C^1 函数，$G=(g_1,\dots,g_m):W\to\mathbb{R}^m$ 是 C^1 映射，$x^0\in W,G(x^0)=0$ 且 $\mathrm{rank}G_{x^0}=m$。如果 x^0 是函数 f 限制在集合 $M=\{x\in W|G(x)=0\}$ 上的极值点，那么存在常向量 $\lambda^0=(\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0)$ 使得 (x^0,λ^0) 是函数

$$H(x,\lambda)=f(x)+\langle\lambda,G(x)\rangle=f(x)+[\lambda_1g_1(x)+\dots+\lambda_mg_m(x)]$$

的驻点。

2 Riemann 积分

2.1 Jordan 测度

引理 5. D 是可测集当且仅当存在一系列分割 $\{\pi_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^+_{\pi_n}(D) - \sigma^-_{\pi_n}(D) = 0.$$

定理 2.1. 平面有界子集 D 是 Jordan 可测集当且仅当 $\sigma(\partial D) = 0$。

定理 2.2 (萨德定理). U 是 $\mathbb{R}^2$ 的非空开集，$f : U \to \mathbb{R}^2$ 是 C^1 映射，$E \subset U$ 是一个紧致集合，记 $C = \{x \in E|\det \mathrm{d}f(x) = 0\}$，则 $f(C)$ 为零测集。

可积函数类：

- 设 D 是一个可测集，f 是 D 的闭包 $\overline{D}$ 上的连续函数，则 f 在 D 上可积。
- 定义在可测紧致集合 D 上的函数 f 是 Riemann 可积的当且仅当 f 的不连续点是 Lebesgue 零测集。
- 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}$ 上的可测集，f 是定义在 D 上的有界函数，f 在 D 上 Riemann 可积当且仅当对任意 $\delta > 0$，集合 $D_\delta(f) = \{P \in D|\omega_f(P) \geq \delta\}$ 是零测集。

注：平面的有界集合是 Lebesgue 零测集，是指对任意 $\varepsilon > 0$，存在一系列区间 $\{I_n\}$ 满足 $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j; \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sigma(I_j) < \varepsilon$。