第五次习题课

dyk

dyk2021@mail.ustc.edu.cn

2022 年 5 月 20 日

知识点速通

作用于一电荷上的力不仅取决于它的位置，而且还去决于它的运动速度. 空间每一点可由两个能确定作用于电荷上的力的矢量来做标志. 首先，**电力**提供了与电荷运动无关的一部分力，我们用电场 $\mathbf{E}$ 来描述它；其次，另一部分力被称为**磁力**，是有赖于电荷速度的. 我们引入磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 来描述这种力.

作用在电荷上的总电磁力可以写成：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{1}$$

在电磁学中，一般将磁场对电流的作用力称为**安培力**，将磁场对单个运动电荷的作用力称为**洛伦兹力**.

知识点速通

毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律描述了电流元在空间中一点激发的磁场.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{I}d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}. \tag{2}$$

对应地，对于体电流和面电流系统，把上式中的 $\mathbf{I}d\mathbf{l}$ 分别改为 $\mathbf{j}dV$ 和 $\mathbf{i}dS$ 即可. 毕奥-萨伐尔定律反映了磁场的距离平方反比关系.

安培定律

安培定律是安培力公式与毕奥-萨伐尔定律的结合. 可写为如下形式:

$$d\mathbf{F_{12}} = I_2 d\mathbf{l_2}\times d\mathbf{B_{12}}. \tag{3}$$

静磁场基本定理

(1) 高斯定理.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \tag{4}$$

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{5}$$

高斯定理反映了磁场的“无源性”与毕奥-萨伐尔定律反映的磁场的距离平方反比并无关系.

(2) 安培环路定理

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 j; \tag{6}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \tag{7}$$

安培环路定理是基于磁场的距离平方反比关系的，反映了磁场的“有旋性”.

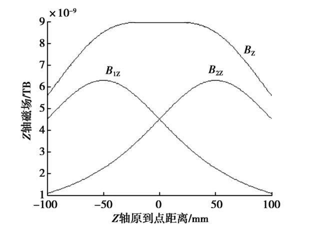
利用毕奥-萨伐尔定律计算磁场

习题 1

载有电流 I 的导线构成边长为 $2a$ 的正方形，求正方形轴线上距离中心 O 为 r 处的磁感应强度 $\mathbf{B}$.

习题 2 亥姆霍兹线圈

两个半径为 R 的相同的圆线圈载有电流 I，共轴放置，两圆心 O_1 与 O_2 相距为 a，以 O 为原点，轴线为 x 轴.
(1) 求轴线上坐标为 x 处的磁感应强度 $\mathbf{B}$.
(2) 说明在 $a=R$ 时，O 处的磁场近乎是均匀的.



习题 3 一无限大平行板电容器充电后，极板之间产生一均匀电场 $\mathbf{E}$，另有一均匀磁场 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{E}$ 垂直. 一质量为 m，电荷量为 e 的电子从负极板出来（速度很小可视为 0，不计重力），求出极板间距的临界值 d_0 使得当 $d > d_0$ 时，电子无法到达正极板.

习题 4 一质量为 m 电荷量为 q 的粒子，在 $t = 0$ 时刻，以速度 $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$ 自原点 O 出发在均匀磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ 里运动.
(1) 求出粒子运动轨迹，定性说明该轨迹的几何形状.
(2) 在 $z = a$ 处有一平面屏，求粒子到达屏的位置.

习题 5 在空间中有相互垂直的均匀电场 $\mathbf{E}$ 和均匀磁场 $\mathbf{B}$. 其中 $\mathbf{B}$ 沿 x 轴正向，$\mathbf{E}$ 沿 z 轴正向. 一质量为 m，电荷量为 e 的电子从原点出发，具有初速度 $\mathbf{v_0} = v_0\mathbf{j}$，试求电子运动轨迹.

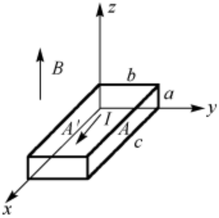
霍尔效应

当电流垂直于外磁场通过半导体时，载流子发生偏转，垂直于电流和磁场的方向会产生一附加电场，从而在半导体的两端产生电势差，这一现象就是**霍尔效应**.

5.16 如习题 5.16 图所示，一块半导体样品的体积为 $a\times b\times c$，沿 x 方向有电流 I，在 z 轴方向加有均匀磁场 $\boldsymbol{B}$. 已知 $a=0.10\text{cm}$，$b=0.35\text{cm}$，$c=1.0\text{cm}$，$I=1.0\text{mA}$，$B=3000\text{G}$，其两侧的电势差的实验结果为 $U_{AA'}=6.5\text{mV}$.

（1）问这半导体是正电荷导电（p 型）还是负电荷导电（n 型）？

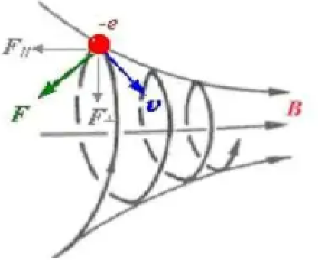
（2）求载流子浓度（即单位体积内参加导电的带电粒子数）.



习题 5.16 图

磁镜

磁镜是一种中间弱、两边强的特殊磁场位形. 当绕着磁力线旋进的粒子由弱磁场区进入两端的强磁场区域时，就会受到一反向力的作用. 这个力迫使粒子的速度减慢，轨道螺距缩短，然后停下来并反射回去，反射回去的粒子达管子中心区域后，又向另一端螺旋前进，达端口后又被反射回来。粒子就像光在两个镜子之间来回反射，所以称之为磁镜.



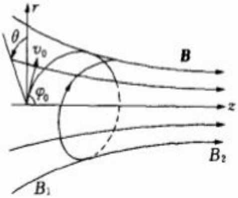
磁镜基本结论的证明

设磁镜中间的弱场区磁场大小为 B_0，磁镜两端的强场区磁场大小为 B_m，则投掷角大于 θ_m 的粒子将会被捕获，其中：

$$sin^2\theta_m = \frac{B_0}{B_m}. \tag{8}$$

其证明参考如下例题：

题 3.45 一质量为 m，带电量为 $+q$ 的粒子在轴对称非均匀磁场中绕磁场的轴线(取为 z 轴)作螺旋运动，从磁感应强度为 B_1 的区域逐渐进入磁场较强的区域，回转半径缓慢减小，最终被反射(磁镜)。设粒子在 B_1 区域时，速率为 v_0，速度方向与 z 轴夹 ϕ_0 角，磁场最强处的磁感应强度为 B_2，求粒子能被反射的 φ_0 角的最小值 φ_c。(可作合理近似)



题 3.45 图

2018 春电磁学 A 公选题

(1) 一个半径为 R，电流为 I 的电流圆环，求在轴线上的磁感应强度.
(2) 设两个线圈各有 N 匝线圈，通以相同的电流为 I，两个线圈的半径都为 R. 如果两个线圈之间的距离为 $10R$，这时两个线圈之间的磁场就形成了一个磁镜，带电粒子在磁镜中磁矩是守恒量. 宇宙射线中的带电粒子在各个方向均匀进入这个磁镜中，则什么角度范围内的带电粒子进入这个磁镜后会被捕获？
(3) 带电粒子在磁镜中运动，若磁感应强度为 B 处的回旋半径 a，证明:

$$a\sqrt{B} = Const$$