

第四次习题课

dyk

dyk2021@mail.ustc.edu.cn

2022 年 4 月 30 日

稳恒条件

电流连续方程

根据电荷守恒定律，对于闭合任意闭合曲面，我们有：

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt} \quad (1)$$

再利用高斯公式，我们得到电流连续方程的微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

稳恒条件

“稳恒”的意义在于电场、电流和电荷的分布不随时间变化。因此有 $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$ 。因而我们得到稳恒条件：

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3)$$

欧姆定律

初中就学过欧姆定律：

$$I = \frac{U}{R} \quad (4)$$

我们也学过导体电阻与其电阻率 ρ 的关系：

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (5)$$

以上两个定律均为实验定律. 进一步我们还可以导出欧姆定律的微分形式：

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (6)$$

焦耳定律

设想电流从导体一端流进，另一端流出，那么由定义，电场做的功为：

$$\Delta A = U dq = UI \Delta t \quad (7)$$

得到电功率：

$$P_e = UI \quad (8)$$

在纯电阻电路中，由能量守恒，电功率等于热功率，即：

$$P_e = I^2 R \quad (9)$$

而在非纯电阻电路中，热功率公式 $P = I^2 R$ 仍然成立，然而有 $UI > I^2 R$ ，还有一部分转化为其他形式的能量，如电动机等。根据电阻的决定式可以推得焦耳定律的微分形式：

$$p = \frac{j^2}{\sigma} \quad (10)$$

欧姆定律的微观解释

在通电导体中，电流密度 $\mathbf{j}$ 和电子漂移速度 $\mathbf{u}$ 有简单的线性关系：

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{u} \quad (11)$$

其中， n 为参与导电的电子数密度， e 为电子电量。结合热学的知识， $\mathbf{u}$ 和电场 $\mathbf{E}$ 也是成正比的：

$$\mathbf{u} = -\frac{e\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}\mathbf{E} \quad (12)$$

其中， m 为电子质量， $\bar{\lambda}$ 为电子的平均自由程， $\bar{v}$ 为电子的平均热运动速率。上式的推导涉及到了对于电子在电场作用下的加速度。在一般情况下， $\bar{v} \gg u$ ，当这个条件不成立的时候，欧姆定律失效。结合 (11),(12) 式我们得到电导率的表达式：

$$\sigma = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} \quad (13)$$

电源及电动势

仅仅只有静电场是不可能实现和维持稳恒电流的. 这是因为稳恒电流必须是闭合的, 那么如果仅仅存在静电场, 就与静电场是保守场相矛盾. 因此需要一个给电路持续提供非静电力的装置, 我们称之为电源. 常见的电源有化学电源, 光电池, 温差发电器, 核能电池等等.

稳恒电路中静电场的作用

- (1) 调节电荷分布;
- (2) 能量中转.

全电路欧姆定律

电源两端路段电压 U 满足关系:

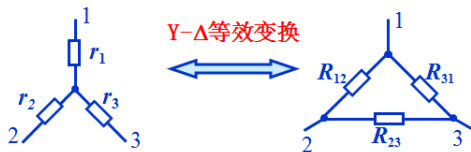
$$U = \mathcal{E} - Ir \quad (14)$$

其中, r 为电源内阻.

电路问题的多种求解方法

基于基尔霍夫定律，解决电路有两种衍生的方法：支路电流法和回路电流法，这里不多赘述。

星三角变换



$$r_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$r_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$r_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}$$

$$R_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}$$

$$R_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2}$$

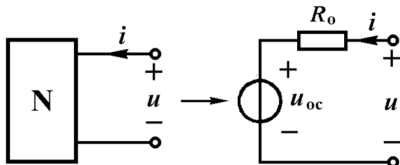
一些技巧

叠加原理

当有两个或两个以上的独立电源作用时，则任意支路的电流或电压，都可以认为是电路中各个电源单独作用而其他电源不作用时，在该支路中产生的各电流分量或电压分量的代数和。

戴维南定理

任意线性有源二端网络 N ，可以用一个理想恒压源和一个电阻串联代替。恒压源的电压 $\mathcal{E}$ 为网络的开路电压，等效电阻 R_{eff} 为在网络中所有电源短路情况下的电阻。



宏观静电能与极化能

对于一个电容器，我们有熟知的公式：

$$W = \frac{1}{2}QU \quad (15)$$

这里的能量指的是“电容器的静电能”，它考察的是电容器极板上的电荷携带的能量，另一种写法就是：

$$W_{\text{静}} = \frac{1}{2} \int U dq_0 \quad (16)$$

这里的 dq_0 积分对象是极板上的自由电荷。然而在电容器中存在电介质的时候，介质表面也会有极化电荷的存在。此时，系统的“宏观静电能”应当包含这一部分极化电荷的贡献。我们写出总的静电能的表达式：

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} \int U dq \quad (17)$$

宏观静电能与极化能

用 (17) 式减去 (16) 式, 我们得到:

$$W_{total} - W_{\text{静}} = \frac{1}{2} \int U dq - \frac{1}{2} \int U dq_0 \quad (18)$$

此时定义极化能

$$W_{\text{极化}} = W_{\text{静}} - W_{total}$$

得到如下关系:

$$W_{\text{极化}} = -\frac{1}{2} \int U dq_{\text{极化}} \quad (19)$$

在计算宏观静电能的时候, 能量密度 $\mathcal{W}_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, 在计算电容器的静电能时, 能量密度取 $\mathcal{W}_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$.

题目讲解

P109 例 4.2

样题计算题 3, 填空题 5,6,7

好题赏析

求极化强度为 P , 半径为 R , 相对介电常数为 ϵ_r 的均匀极化介质球的静电能、宏观静电能和极化能.

片间的距离为 d , 扇形角为 90° , 内半径为 r_1 , 外半径为 r_2 , 如图 3.40 所示. 六对定片连接在一起成为一组, 五对动片也连接在一起成为另一组. 当定片与动片的电势差 U 保持不变, 动片转到如图 3.40 所示的位置时, 两组片同一边的夹角为 θ , 略去边缘效应, 试求: (1) 这个系统储藏的静电能量 W ; (2) 电场作用在动片上的力矩 M ; (3) $r_1 = 1.0\text{cm}$, $r_2 = 3.0\text{cm}$, $d = 5.0\text{mm}$, $U = 5.0\text{kV}$ 时, M 的值.

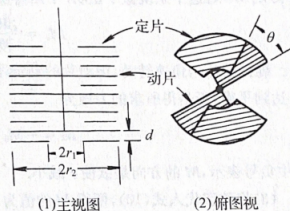


图 3.40