第三次习题课

dyk

dyk2021@mail.ustc.edu.cn

2022 年 4 月 23 日

目录

复习题 1

2.17 球形电容器由半径为 R_1 的导体和与它同心的导体球壳构成，壳的内半径为 R_2，其间有两层均匀介质，分界面的半径为 r，内、外层介质的介电常量分别为 ε_1 和 ε_2 .

（1）求电容 C；

（2）当内球带电荷 $-Q$ 时，求介质表面上极化电荷的面密度 σ' .

解 （1）采用球坐标（R,θ,ϕ）．由对称性，介质中的 $\boldsymbol{D}$ 沿径向方向（$\boldsymbol{e}_R=\boldsymbol{R}/R$），其大小仅与 R 有关．于是，可运用高斯定理算得 $\boldsymbol{D}$ 的大小等于 $D=q/(4\pi R^2)$，式中 q 为内球所带电量．在两层介质中的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(R_1\leqslant R\leqslant r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1 R^2}\boldsymbol{e}_R,\quad \boldsymbol{E}(r\leqslant R\leqslant R_2)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_2 R^2}\boldsymbol{e}_R$$

据此求得两极板间的电势差和电容为

$$\Delta U=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\int_{R_1}^{r}\frac{q\,\mathrm{d}R}{4\pi\varepsilon_1 R^2}+\int_{r}^{R_2}\frac{q\,\mathrm{d}R}{4\pi\varepsilon_2 R^2}=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 R_1}-\frac{1}{\varepsilon_1 r}+\frac{1}{\varepsilon_2 r}-\frac{1}{\varepsilon_2 R_2}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 R_1R_2 r}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)R_1R_2+(\varepsilon_2R_2+\varepsilon_1R_1)r]$$

$$C=\frac{q}{\Delta U}=\frac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2R_1R_2r}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)R_1R_2+(\varepsilon_2R_2+\varepsilon_1R_1)r}$$

（2）当 $q=-Q$ 时，有

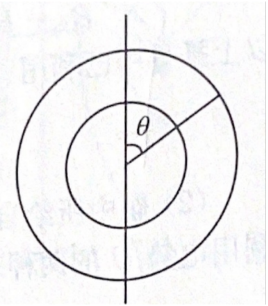
$$\boldsymbol{P}_1=-\frac{Q(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_1R^2}\boldsymbol{e}_R,\quad \boldsymbol{P}_2=-\frac{Q(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_2R^2}\boldsymbol{e}_R$$

据此求得各介质表面的极化电荷面密度如下：

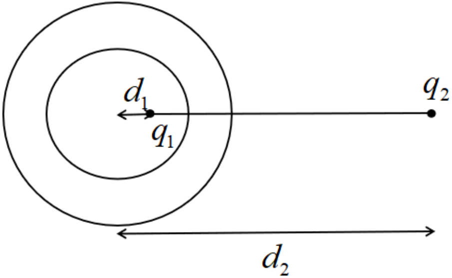
$$\sigma'|_r=-(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)_r\cdot\boldsymbol{e}_R=-\frac{Q(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_1r^2}+\frac{Q(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_2r^2}=-\frac{Q}{4\pi r^2}\cdot\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$\sigma_1'=\boldsymbol{P}_1(R_1)\cdot(-\boldsymbol{e}_R)=\frac{Q(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_1R_1^2},\quad \sigma_2'=\boldsymbol{P}_2(R_2)\cdot\boldsymbol{e}_R=-\frac{Q(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_2R_2^2}$$

复习题 2 一个球形电容器，内外半径为 a, b, 其中间填满电介质，其介电常数随极角的分布为 $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 cos^2\theta$ ，求电容器的电容.



一个球壳状导体，导体本身带有电荷 Q，内外半径为 a, b, 距离球心 $d_1(< a)$ 处和距离球心 $d_2(> b)$ 处分别放置点电荷，电荷量为 q_1, q_2，求球心电势.



真空点电荷之间的相互作用能

考虑一个体系，刚开始所有的电荷之间都相距无穷远，把他们聚合成这个体系必然需要做功，而这个功的大小就是点电荷体系的相互作用能.
我们可以用归纳法得出：

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2}\sum q_i U_i \tag{1}$$

其中，U_i 指的是第 i 个电荷处，除了这个电荷本身的其他电荷在这个点产生的电势.

考虑体分布和面分布的静电能，我们可以类比点电荷相互作用能的结果，对于体系中每一个点的电量和电势相乘，求积分除以 2 即可，即：

$$W_e = \frac{1}{2}\int U dq \tag{2}$$

在体电荷分布和面电荷分布的情况下我们分别可以写出：

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint \rho_{(\mathbf{r})}\, U_{(\mathbf{r})}\, dV \tag{3}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint \sigma_{(\mathbf{r})}\, U_{(\mathbf{r})}\, dS \tag{4}$$

需要注意的是，以上的 U 是考察的那一个点的绝对电势，而在点电荷和线电荷存在的时候，就不能这么考虑.

有 n 个带电体构成的体系的**静电能**由两部分组成：**自能**和**互能**.
静电能定义为:

$$W_e = \frac{1}{2}\int U dq \tag{5}$$

其中，U 为该点的**绝对电势**. 以第 i 个带电体为例，考察其上一个点，该点的**绝对电势**由两部分产生：第一部分是这个带电体本身在这个点产生的电势 U_i，第二部分便是其余带电体在这个点产生的电势 $U^{(i)}$，我们有简单的加和关系:

$$U = U_i + U^{(i)} \tag{6}$$

因而静电能的表达式能写成两部分:

$$W_e = \frac{1}{2}\int U_i dq + \frac{1}{2}\int U^{(i)} dq \tag{7}$$

$$W_e = W_{\text{自}} + W_{\text{互}} \tag{8}$$

点电荷，线电荷是两个理想化的模型. 理论上，他们本身的自能是趋于无穷的. 严格来讲，只要空间中有所谓“点电荷”和“线电荷”存在，全空间的静电能必然不收敛，考察绝对的静电能没有意义. 因此，在有点电荷和线电荷的场合，我们习惯用他们之间的互能来表征体系的能量. 线电荷的情况，写为：

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2}\int_L \lambda_e(l)\,U_i(l)\,dl \tag{9}$$

其中，$U_i(l)$ 是除了第 i 个带电体以外，其余电荷在一点处产生的电势. 点电荷的情况与之前提到的一致，为：

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2}\sum q_i U_i \tag{10}$$

例题 3.1,3.2,3.3

电荷体系在外场中的静电能

当我们把一个电荷体系放入外电场中的时候，我们所说的**电荷体系在外场中的静电能**指的是：这个电荷体系由于外电场存在而额外具有的能量，即电荷体系和外场的**相互作用能**. 记下结论：

$$W_e = \int U(\mathbf{r})\, dq(\mathbf{r}) \tag{11}$$

其中 $U(\mathbf{r})$ 是外电场在 $\mathbf{r}$ 处的电势. 对于点电荷系统，可以写成求和形式：

$$W_e = \sum q_i U(\mathbf{r_i}) \tag{12}$$

例题 3.4

电场的能量和能量密度

电场是携带能量的，我们也可以通过对于全空间电场积分求出静电能.
定义静电场的能量密度：

$$\mathcal{W}_e = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \tag{13}$$

在真空中，$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$. 因而有：

$$\mathcal{W}_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{14}$$

静电能的大小便是能量密度对于体积的积分：

$$W_e = \iiint \mathcal{W}_e dV \tag{15}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dV \tag{16}$$

例题 3.3,3.5

现在我们来考察一类问题，一个 n 个彼此绝缘的带电导体组成的带点系统，我们要设法求出其中一个带电体收到的静电力. 有的时候，受力分析解决不了问题.

如果系统是孤立的，设我们考察的带电体受到静电力为 $\mathbf{F}$，这时候引入虚拟力 $\mathbf{F}^{'} = -\mathbf{F}$ 对该带电体施加一个位移 $\delta\mathbf{r}$，则由能量守恒，得到静电能变化量满足的关系式：

$$\delta W_e = \mathbf{F}^{'} \cdot \delta\mathbf{r} \tag{17}$$

进一步化简，并且取极限 $\delta\mathbf{r} \to 0$，我们得到：

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_e)_Q \tag{18}$$

例题 3.7(2)

如果系统不是是孤立的，代表有外力给体系做功，情况往往复杂的多.
一个简单的情况是，电容器两端接着电源，这样的话电源就作为非静电力的源头给体系做功，导致系统不再孤立. 我们可以用虚位移原理列出微分关系式来探究静电能 W_e 与待考察带电体受力 $\mathbf{F}$ 的关系.
设我们考察的带电体 (例如电容器的极板) 受到静电力为 $\mathbf{F}$，这时候引入虚拟力 $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$ 对该带电体施加一个位移 $\delta\mathbf{r}$，由能量守恒，

$$\text{虚拟力做的功} + \text{电源做的功} = \text{电容器静电能的变化量}$$

$$UdQ + \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r} = d(\frac{1}{2}UQ) \tag{19}$$

化简，得到：

$$\mathbf{F} = (\nabla W_e)_U \tag{20}$$

例题 3.6,3.7(1),3.8
进阶 3.9,3.10