基于多目标优化方法的 PTO 最大功率研究

摘要

科技发展的同时往往伴随着对能源的更高要求，波浪能就是一种不可被忽视的可再生能源，其在世界范围内有广泛分布，具有广泛的利用前景。本文通过对一种“浮子式”波浪能装置的运动情况进行分析并且通过调整各种参数优化能量转换的效率，对该类型波浪能装置的制作和生产具有参考价值。

针对问题一，对垂荡方向单个自由度进行分析，基于牛顿运动第二定律我们对于不同条件分别建立出浮子和振子的运动方程，再利用龙格–库塔算法进行求解。最终求得阻尼器阻尼系数恒定时浮子和振子在 $10s, 20s, 40s, 60s, 100s$ 的位移分别为 $(-0.192, -0.592, 0.288, -0.319, -0.093)$m, $(-0.213, -0.635, 0.299, -0.337, -0.095)$m；在阻尼器阻尼系数与相对速度绝对值的平方根成正比时，浮子和振子在 $10s, 20s, 40s, 60s, 100s$ 的位移分别为 $(-0.261, -0.635, 0.284, -0.258, -0.048)$m, $(-0.94, -0.683, 0.296, -0.272, -0.050)$m。

针对问题二, 先通过建立阻尼器做功的物理模型得到功率的目标函数，基于二次序列算法，采用遍历搜索与多变量极值求解方法, 求出多个均匀分布离散点的局部最大功率不断试探搜索最优解区间。最终求得：(1)阻尼系数为$\beta_z = 3.7009 \times 10^4 N \cdot s/m$左右时 PTO 功率最大，为$P_{max} = 245.5386W$。(2)阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比时，比例系数和幂指数分别取 $k = 1.0000\times 10^5, c = 0.4026$ 时 PTO 功率最大，为$P_{max} = 278.100W$。

针对问题三，我们引入转动自由度，对浮子纵摇和垂荡运动方程进行分析，对振子利用极坐标系进行模型分析, 再进行 ode 组的求解, 最终求得浮子和振子在 $10s, 20s, 40s, 60s, 100s$ 的位移分别为 $(-0.5254, -0.7006, 0.3690, -0.3165, -0.0491)$m, $(-0.5954, -0.7676, 0.3924, -0.3367, -0.0415)$m。

针对问题四, 我们采用遍历模拟和与多变量极值求解方法, 求出多个均匀分布离散点为初值下的极值。计算发现最大功率的收敛情况优良, 在直线阻尼系数和旋转阻尼系数分别取到 $51000\mathrm{N}\cdot\mathrm{s/m}$ 和 $25000\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}$ 时，PTO 能量转化的功率最大，为$P_{max} = 269.19W$。

最后对本文建立的模型进行分析和讨论，综合评价模型。

关键词　PTO 最大功率　参数优化　MATLAB　sqp 算法　遍历搜索　多变量极值

一 问题重述

随着科技的逐年发展，人类的发展面临着供需不平衡的问题和污染环境的风险，因此需要人们不断地去探索收集和利用可再生能源的方法。我们即将研究的波浪能装置的能量转换效率是重要可再生能源波浪能规模化利用的关键问题之一。波浪能装置的种类有很多，我们考虑的是一个简化后的腔内浮子式波浪能装置，其结构如下图所示：

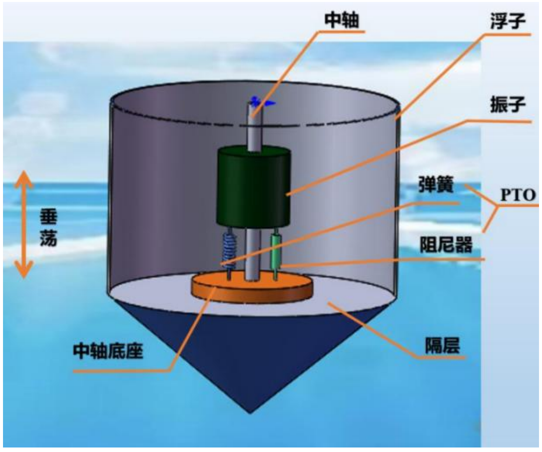


图 1 腔内浮子式波浪能装置示意图（一维简化）

在垂荡方向上，该波浪能装置由浮子、振子、中轴以及能量输出系统（PTO，包括弹簧和阻尼器）构成。浮子的结构由一个均匀圆柱壳和圆锥体壳拼接而成，圆锥体壳的底面是隔层。实心圆柱体振子穿在中轴上，其下端分别与一个弹簧和阻尼器固连，弹簧和阻尼器的底端与底部隔层相连。在波浪的作用下，浮子振动带动振子振动，两者的相对运动对阻尼器做功，并以其他能量的形式输出。

我们考虑二维情形，在前有的基础之上增加了一个自由度的摆动，如下图所示：

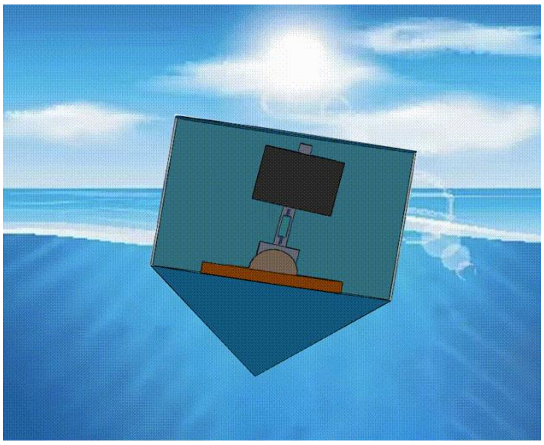


图 2 腔内浮子式波浪能装置示意图（二维情形）

新增了一个通过转轴铰接于底座的中轴架，中轴可绕转轴转动，PTO 系统连接振子和转轴架，并处于中轴与转轴所在的平面。在转轴上还对称安置了旋转阻尼器和扭转弹簧，和直线阻尼器共同做功输出能量。因此在波浪的作用下腔内

的浮子会随着转轴做转动又会在转轴上做振动这里，扭转弹簧的扭矩与浮子和振子的相对角位移成正比；旋转阻尼器的扭矩与浮子和振子的相对角速度成正比。

考虑以下问题：

问题一 认定直线阻尼器的阻尼力与浮子和振子的相对速度成正比。考虑一维简化情形，建立浮子与振子的运动模型，利用附件提供的参数值分别对以下两种情况计算浮子和振子在周期性波浪激励力作用下前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2 s 的垂荡位移和速度：(1) 直线阻尼器的阻尼系数为 10000 N•s/m；(2) 直线阻尼器的阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，其中比例系数取 10000，幂指数取 0.5。此外，还需将结果存放在指定文件中并且给出在特定时间点浮子与振子的垂荡位移和速度。

问题二 仍考虑一维简化情形，对问题一中在不同情况下的部分参数进行优化，找到最优阻尼系数的数学模型，使得 PTO 系统的平均输出功率最大：(1) 阻尼系数为常量，阻尼系数在区间 [0,100000] 内取值；(2) 阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，比例系数在区间 [0,100000] 内取值，幂指数在区间 [0,1] 内取值。同时我们要给出算两种情况的最大输出功率及相应的最优阻尼系数。

问题三 考虑二维摆动加振动模型。设定初始时刻浮子和振子平衡于静水中，我们需要建立浮子与振子的运动模型，在假定直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数均为常量的前提下，利用附件中的参数，计算浮子与振子在周期性波浪激励力和波浪激励力矩作用下前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2 s 的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度，并将结果存放在指定文件中，给出特定时间点浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。

问题四 在问题三的前提之下，令直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数均在区间 [0,100000] 内取值，建立并求解直线阻尼器和旋转阻尼器最优阻尼系数的数学模型，并给出最大输出功率及相应的最优阻尼系数。

二 模型假设

1. 假设问题中的海水无粘且无旋；
2. 假设振子是实心圆柱体；
3. 假设忽略中轴、底座、隔层及 PTO 的质量和各种摩擦；
4. 假设在二维情形下中轴的铰接点无横向位移。

三 符号说明

表 1　符号说明

符号	符号描述	单位	默认值
m_1	浮子质量	kg	4866
m_2	振子质量	kg	2433
t	从计时起开始的时间	s	–
z_1	浮子的纵向位移（初始为 0）	m	–
z_2	振子的轴向位移（初始为 0）	m	–
z_r	振子与浮子的相对位移	m	–
θ_1	浮子的角位移	rad	–
θ_2	振子的角位移	rad	–
g	重力加速度	$kg \cdot m/s^2$	9.8
ρ	海水密度	kg/m^3	1025
R	浮子底半径	m	1
r	振子半径	m	0.5
h	振子高度	m	0.5
H_1	浮子圆柱部分高度	m	3
H_2	浮子圆锥部分高度	m	0.8
l_0	弹簧原长	m	0.5
k_z	弹簧刚度	N/m	80000
k_θ	扭转弹簧刚度	$N \cdot m$	250000
β_z	直线阻尼器的阻尼系数	$N \cdot s/m$	–
β_θ	旋转阻尼器的阻尼系数	$N \cdot m \cdot s$	–
β_{ez}	垂荡兴波阻尼系数	$N \cdot s/m$	–
$\beta_{e\theta}$	纵摇兴波阻尼系数	$N \cdot m \cdot s$	–
β_b	静水恢复力矩系数	$N \cdot m$	8890.7
M_p	PTO 的约束力矩	$N \cdot m$	–
ω	入射波浪频率	s^{-1}	–
P	体系对阻尼器做功的（平均）功率	$N \cdot m/s$	–
F_i	振子与中轴的相互作用力	N	–
f	垂荡激励力的振幅	N	–
m_a	附加质量	kg	–
J_a	附加转动质量	$kg \cdot m^2$	–
J_1	浮子绕铰接点（转轴）的转动惯量	$kg \cdot m^2$	14340.6
L_e	波浪激励力矩	$N \cdot m$	–
L	波浪激励力矩振幅	$N \cdot m$	–
L_c	浮子重心到转轴的距离	m	1.189
$W_z(t)$	t 时间内直线阻尼器做的功	$N \cdot m$	–
$W_\theta(t)$	t 时间内旋转阻尼器做的功	$N \cdot m$	–

四 问题分析

问题一分析 对于问题一，需要建立垂荡方向上波浪激励力下 PTO 式装置的运动模型。基于牛顿运动第二定律我们对于不同条件分别建立出浮子和振子的运动方程，再利用龙格-库塔算法进行求解。

问题二分析 对于问题二，在问题一的基础上，我们依次将参量阻尼系数和比例幂指数参量化只需求出 PTO 转化功率最大的最优情况。基于二次序列算法，我们采用遍历搜索与多变量极值求解方法,求出多个均匀分布离散点的局部最大功率不断试探搜索最优解区间。

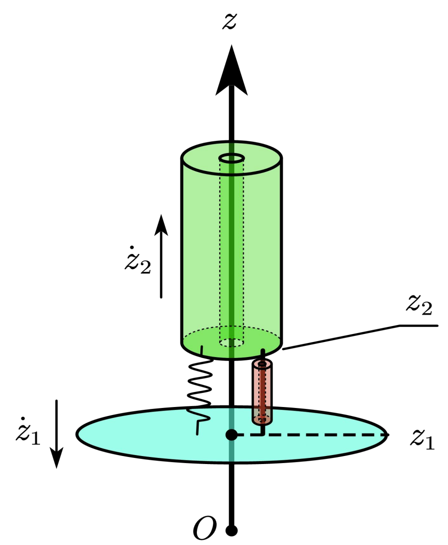
问题三分析 对于问题三，我们引入转动自由度，对浮子纵摇和垂荡运动方程进行分析，对振子利用极坐标系进行模型分析,再进行 ode 组的求解。

问题四分析 对于问题四，我们利用已求得的运动模型，将直线阻尼系数与旋转阻尼系数参数化,类似问题二取不同初始点求出相应极值并进行比对得到最优参数。

五 模型建立

5.1 坐标系的约定

在一维情形下，仅考虑竖直方向的运动情况，只有 z 向一个自由度。其效果如图 3 所示：



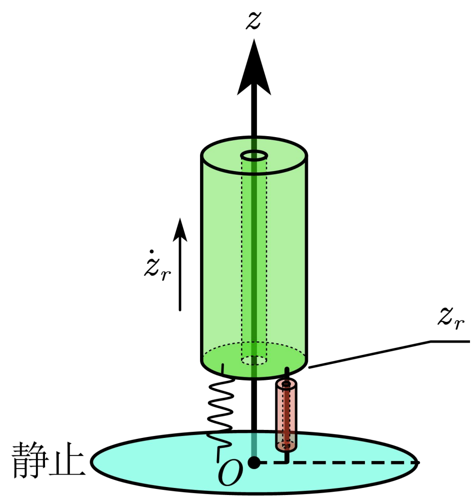


图 3 一维简化条件下的坐标系　　　　图 4 取浮子为参考系示意图

O 点代表的是隔层（即弹簧底部）的初始位置，作为坐标原点。图 3 便显示了某一时刻，底座和振子均在坐标原点之上，而运动方向相反的情形。为了简化计算，我们以浮子为参考系，这样未知参量就是浮子的运动位移$z_1(t)$和相对位移$z_r(t)$。而对于二维情形，则需要另外引入一个角向自由度θ，取向以顺时针为正，如下图所示：

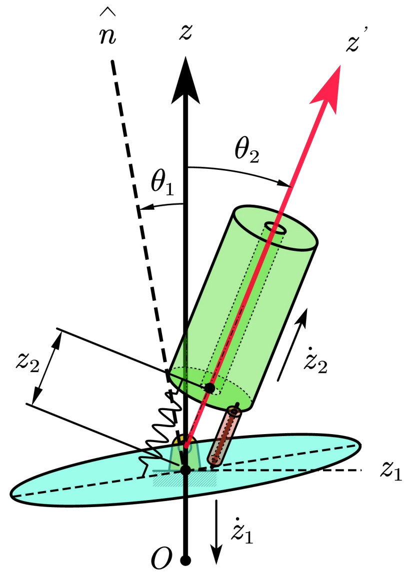


图 5 二维情形下的坐标系

由前文的假设第三条，我们仅考虑铰接点在 z 轴上的运动，因此，浮子的运动状况可以由两个参量所完全描述：z 轴上的位移$z_1(t)$和角向位移$\theta_1(t)$。而描述振子的运动就需要三个参量：浮子 z 轴上的位移$z_1(t)$，z 轴向位移$z_2(t)$和角向位移$\theta_2(t)$。

5.2 一维情形运动方程的建立

首先假定在一维简单情形下，振动幅度不会特别大以至于波浪能装置的隔层上升到海平面以上，或者出现装置完全浸没于水中的情况。我们将在这个假设的前提下通过计算再进行核实。计算得到当浮子的最大振幅不超过 $1.0000m$时，体系不会被完全淹没。

首先，对整个体系在绝对参考系下列出牛顿第二定律：

$$(m_1+m_a)\ddot{z}_1+m_2(\ddot{z}_1+\ddot{z}_r)=f\cos\omega t-\rho g\Delta V-\beta_{ez}\dot{z}_1 \tag{5.2.1}$$

上式中，m_a代表附加质量，ΔV代表排水量的变化量。在上述假设的前提之下，$\Delta V=\pi R^2 z_1$。等号右边分别表示波浪激励力；静水恢复力；兴波阻尼力。再对振子在浮子坐标系下写出其运动方程：

$$m_2\ddot{z}_r=-k_z z_r-\beta_z\dot{z}_r-m_2\ddot{z}_1 \tag{5.2.2}$$

上式中，等号右边分别表示弹簧的拉力，阻尼器的阻尼力和非惯性参考系的惯性力。这里不考虑重力的原因是，在初始情况下重力已经被平衡掉，只需考虑弹力的变化量即可。

5.3 浮子转动惯量模型

考虑浮子绕轴转动的转动惯量J_1。J_1可以分为柱体外壳和锥体外壳的转动惯量$J_{柱}$和$J_{锥}$。其中，柱体的转动惯量可以用平行轴定理得出。我们得到：

$$J_{柱}=\frac{m_{柱}}{12}(6R^2+H_1^{\ 2})+\frac{m_{柱}}{4}H_1^2=m_{柱}\left(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{3}H_1^2\right)=14035.3\ kg\cdot m^2 \tag{5.3.1}$$

再求$J_{锥}$。对锥体外壳划分成一片片高度为dh的细环带，如下图：

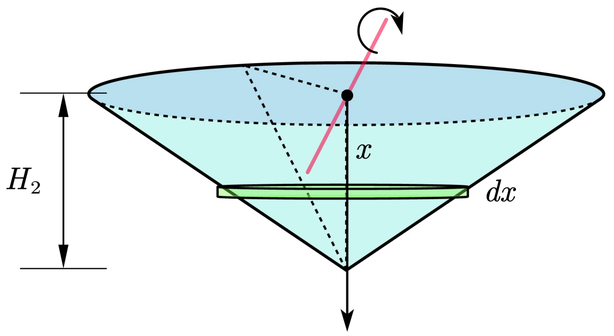


图 6 锥体外壳的微元划分

每一个环带都可以看做一个圆环。已知质量为μ半径为a的圆环绕直径的转动惯量为$\frac{1}{2}\mu a^2$，据此公式再利用平行轴定理进行积分，得到：

$$J_{锥}=\int_{转轴}^{顶点}\frac{R^2}{2}\left(1-\frac{x}{H_2}\right)^2 dm+x^2 dm \tag{5.3.2}$$

上式前一项表示每个环带绕其直径的转动惯量，后一项是平行轴定理。接着，写出微元质量dm和考察高度h之间的关系：

$$dm=m_{锥}\cdot\frac{2\pi R\cdot\frac{H_2-x}{H_2}}{\pi R\sqrt{R^2+H_2^2}}\cdot\frac{\sqrt{R^2+H_2^2}\,dx}{H_2}=m_{锥}\cdot\frac{2(H_2-x)}{{H_2}^2}dx \tag{5.3.3}$$

代入（5.3.7）式即得：

$$J_{锥}=305.3\ kg\cdot m^2 \tag{5.3.4}$$

最终算得：

$$J_1=J_{柱}+J_{锥}=14340.6\ kg\cdot m^2 \tag{5.3.5}$$

5.4 浮子重心高度的计算

以转轴为坐标原点，沿着中轴线向外为 z 轴正方向建系。重心的坐标L_c可表示为：

$$L_c=\frac{\int_{z=-H_2}^{z=H_1} zdm}{m_1} \tag{5.4.1}$$

根据几何关系，并引用（5.3.3）式，上式改写为：

$$L_c=\frac{\int_0^{H_1}\frac{m_{柱}}{H_1}zdz-\int_0^{H_2}m_{锥}\frac{2(H_2-z)}{{H_2}^2}zdz}{m_1} \tag{5.4.2}$$

代入数据，得到：

$$L_c=1.189m \tag{5.4.3}$$

5.5 二维情形运动方程的建立

在考虑振子运动时，其相对于转轴的距离一直都在变化，所以不能直接定义振子相对转轴的转动惯量。这里用极坐标系下的加速度分解视角来考察。在极坐标系下运动的质点，将其加速度分解，有：

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases} \tag{5.5.1}$$

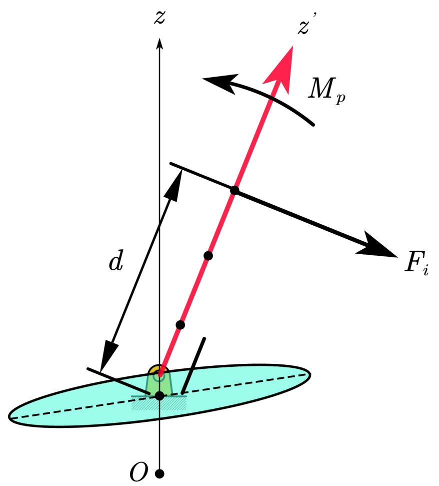


图 7 中轴的受力分析

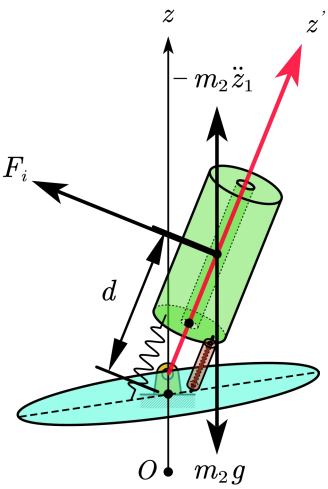


图 8 振子的受力分析

由模型假设的第 3 条，忽略中轴的质量和与振子的摩擦，因而中轴每时每刻都处于转动平衡状态。以铰接点为转轴，考察中轴受到的力矩，有如下关系式：

$$F_i d - \beta_\theta\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right) - k_\theta(\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{5.5.2}$$

其中，上式中的 d 表示支持力的力臂，其大小表示如下：

$$d = l_0 - \frac{m_2 g}{k_z} + \frac{h}{2} + z_2 \tag{5.5.3}$$

上式前三项代表初始时支持力等效作用点的位置，而最后一项则是运动之后振子的位移。接下来考虑振子的受力。振子受到惯性力、重力、支持力和 PTO 的作用。需要注意到的是，在弹簧倾斜之后，原本完全沿杆的重力不再沿杆，导致弹簧会多出 $mg(1-\cos(\theta_2))$的力沿杆作用。沿杆方向，以向外为正，有：

$$-m_2\ddot{z}_1\cos\theta_2 + m_2 g(1-\cos\theta_2) - (k_z z_2 + \beta_z \dot{z}_2) = m_2\ddot{z}_2 - m_2 d\cdot\dot{\theta}_2^{\,2} \tag{5.5.4}$$

再列出切向的方程：

$$-F_i + m_2 g\sin\theta_2 + m_2\ddot{z}_1\sin\theta_2 = m_2\left(2\dot{z}_2\dot{\theta}_2 + d\cdot\ddot{\theta}_2\right) \tag{5.5.5}$$

接下来，对浮子的受力单独考虑：其受到激励力、静水恢复力、兴波阻力、TPO 的力和“弹簧力差”，“弹簧力差”指的是由于弹簧倾斜导致压在浮子上的配重变小而导致的差值。在这里，这个差值是$m_2g(1-cos\theta_2)$。据此我们写出竖直方向浮子的运动方程：

$$(m_1+m_a)\ddot{z}_1=f\cos\omega t-\rho g\pi R^2 z_1-\beta_{ez}\dot{z}_1+(k_z z_2+\beta_z\dot{z}_2)\cos\theta_2+m_2 g(1-\cos\theta_2)$$

(5.5.6)

最后考察浮子的转动情况。以转轴（铰接点）为参考系，当浮子倾斜时，其受到的惯性力也会产生力矩。规范正负号之后，得到：

$$L\cos\omega t-\beta_{e\theta}\dot{\theta}_1+m_1\ddot{z}_1 L_c\sin\theta_1=(J_a+J_1)\ddot{\theta}_1 \tag{5.5.7}$$

通过求解上述(5.5.2),(5.5.4),(5.5.5),(5.5.6),(5.5.7)式，最终可解得所有未知量。

5.6 阻尼器做功功率计算

阻尼器两端分别接着底座和振子，因而在计算阻尼器做功时，应该考虑沿z轴方向的相对速度。故在t时间内对直线阻尼器做的功为：

$$W_z(t)=\int_0^{t\text{时刻}}\beta_z\dot{z}_r\,dz_r \tag{5.6.1}$$

注意到$dz_r=\dot{z}_r dt$，代入上式得到：

$$W_z(t)=\int_0^t\beta_z(\dot{z}_r)^2 dt \tag{5.6.2}$$

出现了平方项，代表每时每刻体系都在对阻尼器做正功，同理，对于旋转阻尼器，也可以写出类似的式子：

$$W_\theta(t)=\int_0^t\beta_\theta\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)^2 dt \tag{5.6.3}$$

据此可写出t时间内的平均功率。对于前两个问题只需取$W_\theta(t)=0$即可。有：

$$P=\frac{W_z(t)+W_\theta(t)}{t} \tag{5.6.4}$$

六 模型求解

6.1 第一题的求解

6.1.1 直线阻尼器的阻尼系数为常量

求解一维情形有如下两个约束方程:

$$\begin{cases}(m_1+m_a)\ddot{z}_1+m_2(\ddot{z}_1+\ddot{z}_r)=f\cos\omega t-\rho g\Delta V-\beta_{ez}\dot{z}_1\\ m_2\ddot{z}_r=-k_z z_r-\beta_z\dot{z}_r-m_2\ddot{z}_1\end{cases} \tag{6.1.1}$$

此时构造列向量$\mathbf{Y}$对上述方程进行改写，$\mathbf{Y}$的构造如下：

$$\mathbf{Y}=[y_1,y_2,y_3,y_4]=[z_1,z_r,\dot{z}_1,\dot{z}_r]^{\mathbf{T}} \tag{6.1.2}$$

则约束关系改写成了如下计算机可求解的形式：

$$
\begin{cases}
\dot{y}_1 = y_3 \\
\dot{y}_2 = y_4 \\
(m_1 + m_a)\dot{y}_3 + m_2(\dot{y}_3 + \dot{y}_4) = f\cos\omega t - \rho g \Delta V - \beta_{ez} y_1 \\
m_2 \dot{y}_4 = -k_z y_2 - \beta_z y_3 - m_2 \dot{y}_3
\end{cases}
\quad (6.1.3)
$$

以上求解仍然基于体系不会淹没的假设（$\Delta V = \rho g \pi R^2 z_1$），利用 MATLAB 的求解常微分方程的函数 ode45 求解结果如下：

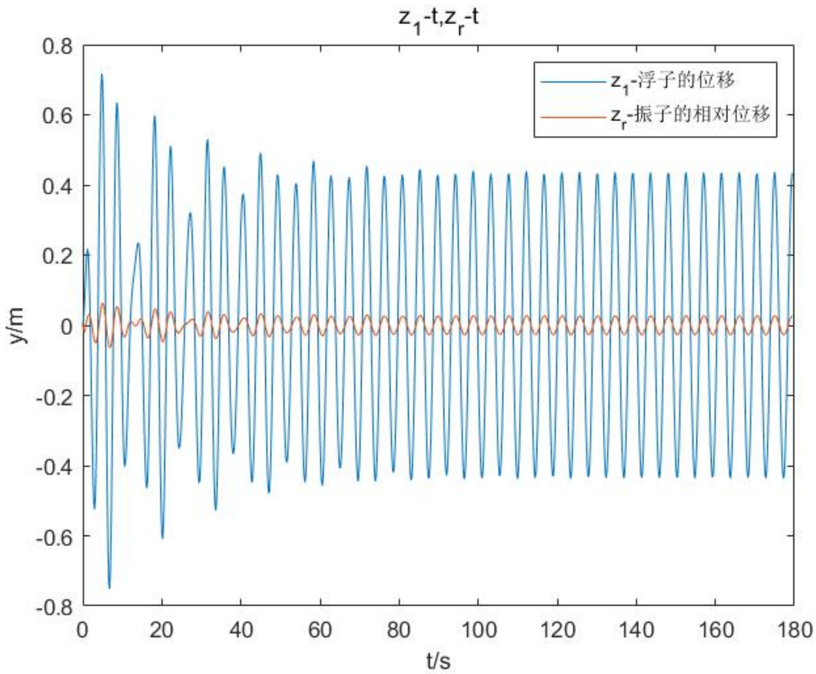


图 9 直线阻尼器的阻尼系数为常量时的$z_1 - t$和$z_r - t$图示

由此可见浮子振幅不会超过 $0.8m$，因此不会出现体系被水淹没的情况。还可以观察到，在约 100 秒后体系的运动情况趋于稳定，进入周期性运动。利用关系式$z_2 = z_1 + z_r$可以将浮子和振子的绝对速度一并算出，制成图表如下：

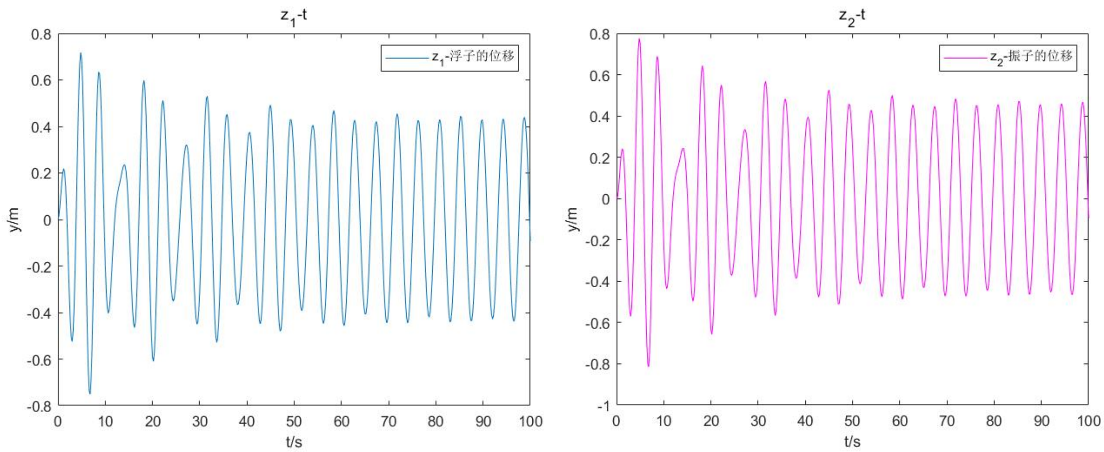


图 10 前 100 秒$z_1 - t$和$z_2 - t$图示

下表给出了浮子和振子在 10s、20s、40s、60s 和 100s 的垂荡位移与速度。

表 2　特定时间点的浮子与振子垂荡位移与速度

t(s)	浮子垂荡位移(m)	振子垂荡位移(m)	浮子速度(m/s)	振子速度(m/s)
10	−0.192	−0.213	−0.642	−0.695
20	−0.592	−0.635	−0.239	−0.270
40	0.288	0.299	0.309	0.328
60	−0.319	−0.337	−0.475	−0.510
100	−0.093	−0.095	−0.603	−0.642

6.1.2 直线阻尼器的阻尼系数与相对速度绝对值的幂成正比

在（6.1.2）式变换的前提下，（6.1.3）式变为：

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ (m_1 + m_a)\dot{y}_3 + m_2\left(\dot{y}_3 + \dot{y}_4\right) = f\cos\omega t - \rho g\Delta V - k|y_2|^c \cdot y_2 \\ m_2\dot{y}_4 = -k_z y_2 - \beta_z y_3 - m_2\dot{y}_3 \end{cases} \tag{6.1.4}$$

上式中，k为比例系数，其值为 10000；c为幂指数，其值为 0.5。利用第一问同样的方法求解，得到的结果如下：

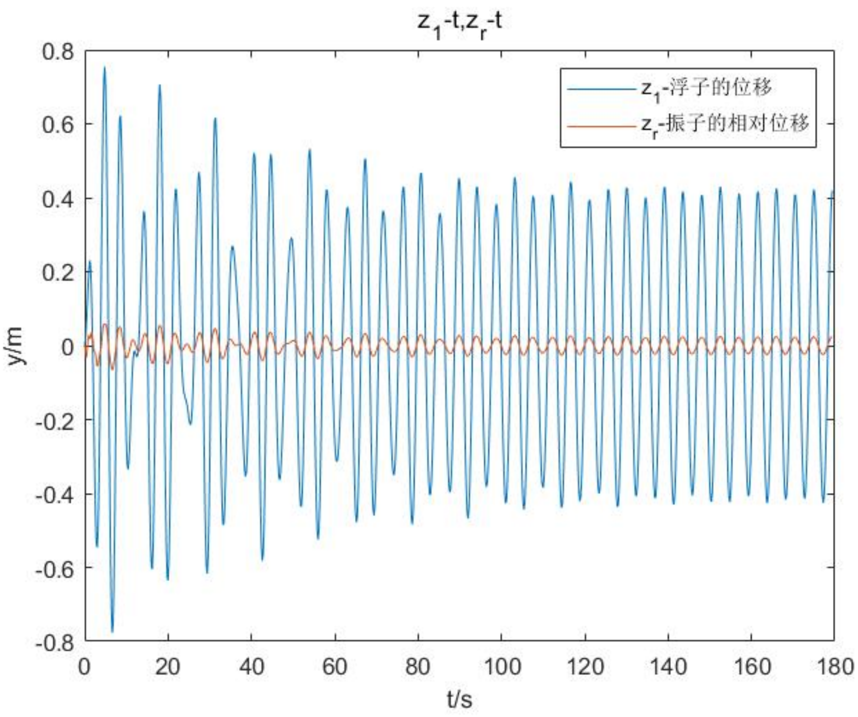


图 11 直线阻尼器的阻尼系数与$\sqrt{|Z_r|}$成正比时的$z_1 - t$和$z_2 - t$图示

这种情况下浮子振幅同样不会超过$0.8m$，因此不会出现体系被水淹没的情况。此外，在约 110 秒后体系的运动情况趋于稳定，进入周期性运动。利用关系式$z_2 = z_1 + z_r$可以将浮子和振子的绝对速度一并算出，制成图表如下：

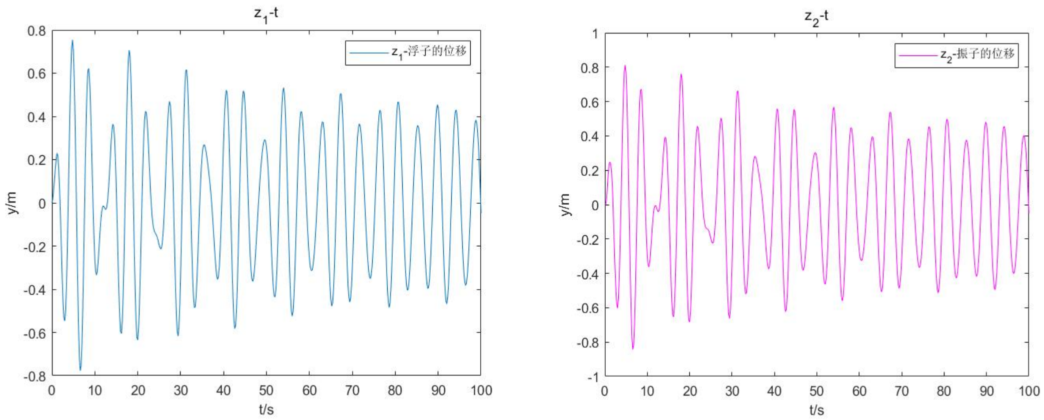


图 12 前 100 秒 z_1-t 和 z_2-t 图示

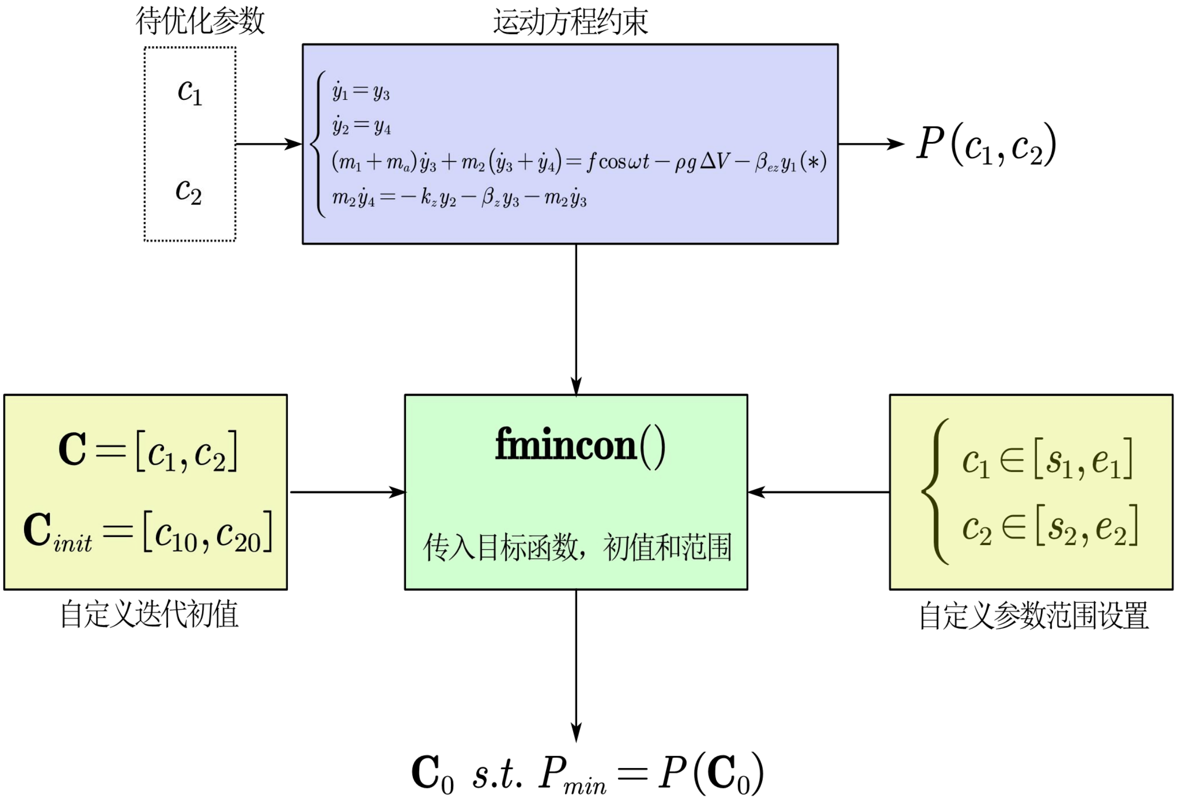
下表给出了浮子和振子在 10s、20s、40s、60s 和 100s 的垂荡位移与速度。

表 3 特定时间点的浮子与振子垂荡位移与速度

t(s)	浮子垂荡位移(m)	振子垂荡位移(m)	浮子速度(m/s)	振子速度(m/s)
10	−0.261	−0.294	−0.401	−0.415
20	−0.635	−0.683	0.111	0.136
40	0.284	0.296	0.628	0.680
60	−0.258	−0.272	−0.229	−0.231
100	−0.048	−0.050	−0.563	−0.594

6.2 第二题的求解

对于此类优化问题，我们采用如下的逻辑来解决：



在这里，由于是要求出P的最大值，因此在优化函数运行之前，提前赋值$P=-P$，接下来求最小值即可。值得的注意的是，在极值附近函数值变化不是很大的情况，最终迭代的结果会与迭代初值和范围的选取有关。上图的(*)式会随着题目要求的不同而发生变化。以下给出两问的求解结果。

6.2.1 阻尼系数为常量

经过不断地改变初始值与参数的上下界，我们得出，在阻尼系数

$$\beta_z=3.7006\times10^4\ N\cdot s/m$$

时，功率达到最大值，其值为

$$P_{max}=245.5386\ W.$$

当β_z在$[3.7\times10^4,5.0\times10^4]$范围内取值时，$P$的变化量并不大，约为$3W$左右。上述结果是经过不断放缩并且改变初值得到的最优解。

6.2.2 阻尼系数正比于相对速度的幂

在比例系数及其幂指数取值分别为

$$k=100000.0000,c=0.4026$$

时，功率达到最大值，其值为

$$P_{max}=278.100\ W.$$

上述两种情况在阻尼系数较小的时候会出现完全浸没的情况。但是在刚好浸没时，功率已经下降到了 210W 左右。由于功率函数是连续分布的，我们认为功率最高点不会在参数范围较为边缘的地方取到。

6.3 第三题的求解

求解二维情形有如下五个约束方程:

$$\begin{cases}F_i d-\beta_\theta\left(\dot\theta_2-\dot\theta_1\right)-k_\theta(\theta_2-\theta_1)=0\\-m_2\ddot z_1\cos\theta_2+m_2g(1-\cos\theta_2)-(k_zz_2+\beta_z\dot z_2)=m_2\ddot z_2-m_2d\cdot\dot\theta_2{}^2\\-F_i+m_2g\sin\theta_2+m_2\ddot z_1\sin\theta_2=m_2\left(2\dot z_2\dot\theta_2+d\cdot\ddot\theta_2\right)\\(m_1+m_a)\ddot z_1=f\cos\omega t-\rho g\pi R^2z_1-\beta_{ez}\dot z_1+(k_zz_2+\beta_z\dot z_2)\cos\theta_2+m_2g(1-\cos\theta_2)\\L\cos\omega t-\beta_{e\theta}\dot\theta_1-\beta_b\theta_1+m_1\ddot z_1L_c\sin\theta_1=(J_a+J_1)\ddot\theta_1\end{cases}$$

(6.3.1)

还是基于系统不会完全淹没的假设，再次采取与解决问题一相似的换元方法。此外，观察到前两式可以消去F_i。定义列向量：

$$\mathbf{Y}=[y_1,\cdots,y_8]=\left[z_1.z_2,\theta_1,\theta_2,\dot{z}_1,\dot{z}_2,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2\right] \tag{6.3.2}$$

所有的约束转化为：

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_5\\ \dot{y}_2=y_6\\ \dot{y}_3=y_7\\ \dot{y}_4=y_8\\ \dot{y}_5=\dfrac{f\cos\omega t-\rho g\pi R^2z_1-\beta_{ez}y_5+(k_2y_2+\beta_zy_6)\cos(y_4)+m_2g(1-\cos y_4)}{m_1+m_a}\\ \dot{y}_6=g(1-\cos(y_4))-\dot{y}_5\cos(y_4)-\dfrac{(k_2y_2+\beta_zy_6)}{m_2}+d\cdot {y_8}^2\\ \dot{y}_7=\dfrac{L\cos\omega t-\beta_{e\theta}y_7-\beta_by_3+m_1\dot{y}_5L_c\sin\theta_1}{J_1+J_a}\\ \dot{y}_8=\dfrac{g\sin y_4-\left(k_\theta(y_4-y_3)+\beta_\theta(\dot{y}_8-\dot{y}_7)\right)/m_2-2y_6y_8}{d}\end{cases}$$

(6.3.3)

这也是 MATLAB 的 ode45 函数可解的微分方程，解得如下结果：

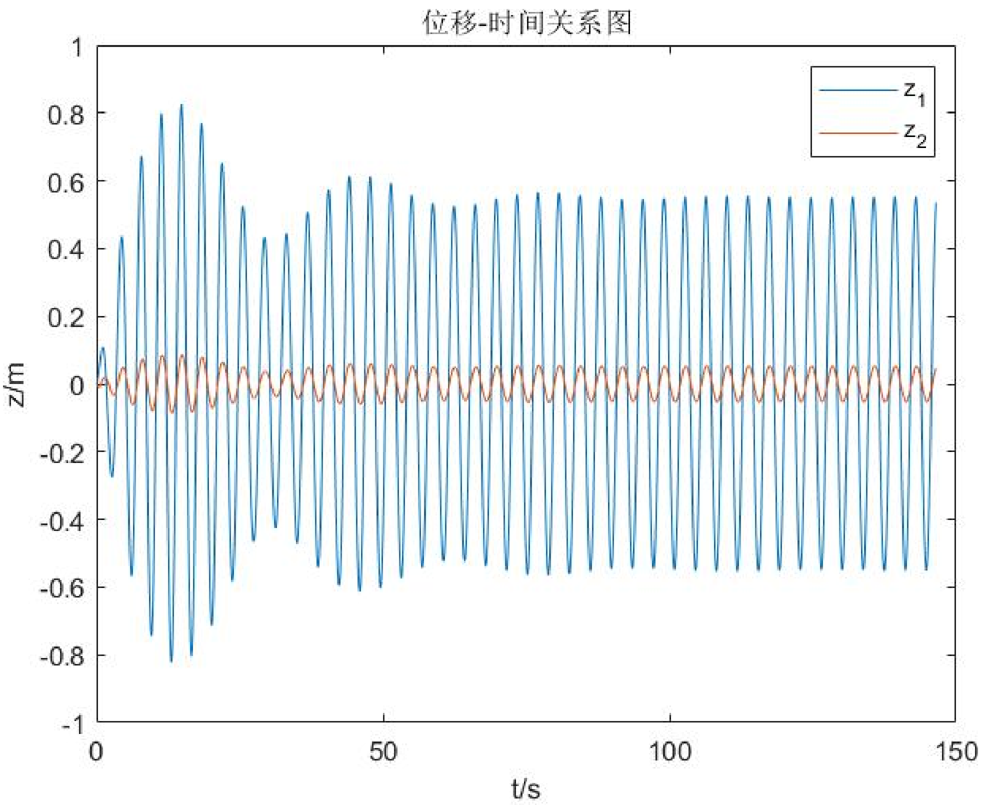


图 13 浮子和振子位移-时间关系图

可以看出，浮子的振幅仍然未超过 1m，因此不会出现淹没的情况。亦可以看出弹簧形变并不是很大，体系在约 60s 后趋于稳定。下图展现了浮子和振子角

位移随时间变化关系图：

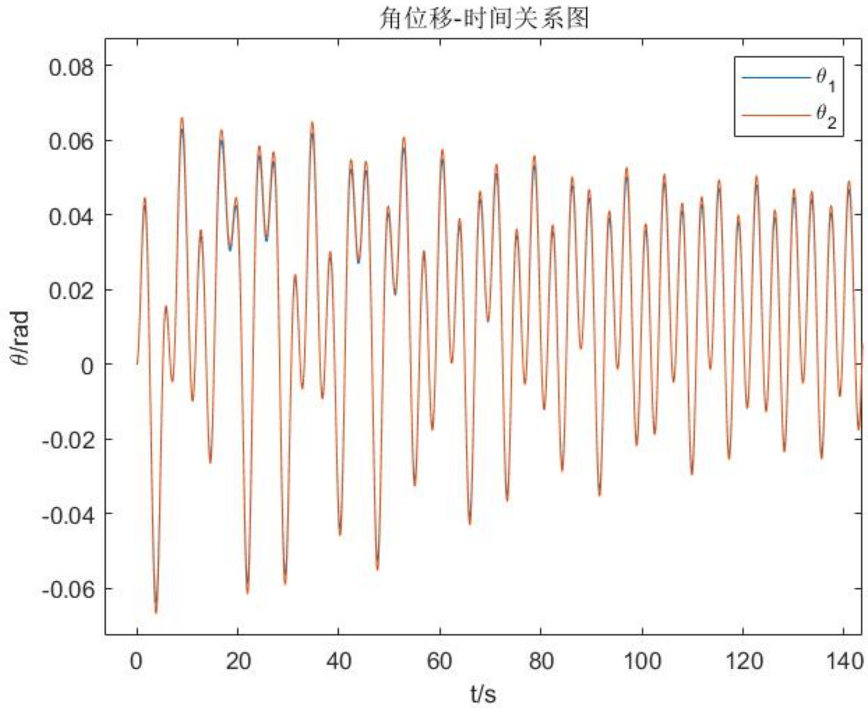


图 14 浮子和振子角位移-时间关系图

图中红蓝两种颜色的线几乎完全重合，除了在极值点处有些许差异，其余保持相位几乎相同。细节放大如下：

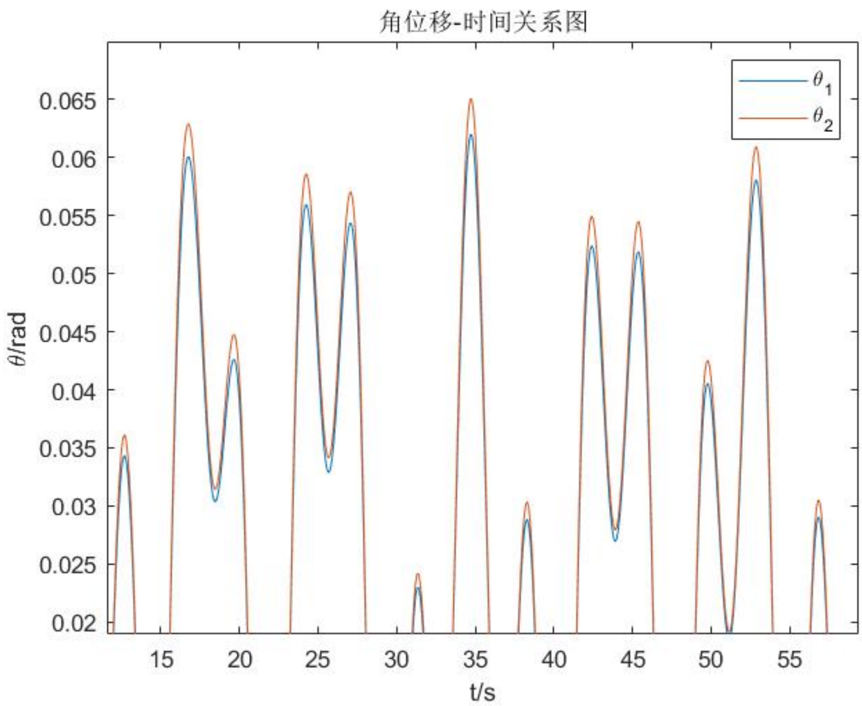


图 14 浮子和振子角位移-时间细节放大图

这是由于扭转弹簧劲度系数过大导致的。当扭转弹簧劲度系数为原有的 0.1 倍时，角位移情况如图 15 所示，浮子和振子的角度差是相当明显的：

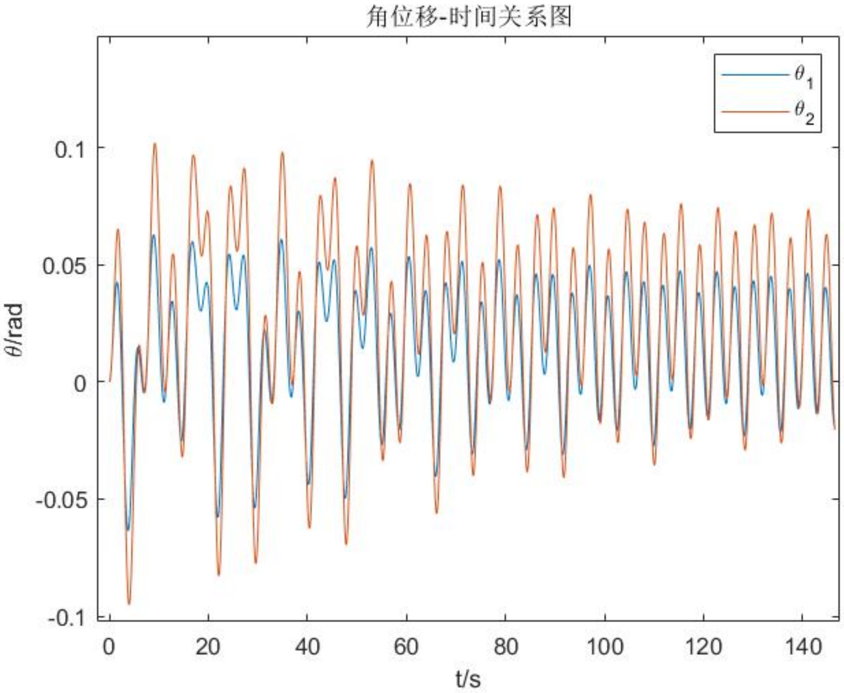


图 15 浮子和振子位移-时间关系图（扭转弹簧劲度系数为原有的 0.1 倍）

下表给出了在若干个时间点浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。

表 4　　特定时间点的浮子的运动情况

t(s)	垂荡位移(m)	垂荡速度(m/s)	角位移(rad)	角速度(rad/s)
10	−0.5254	0.9699	0.0282	−0.0534
20	−0.7006	−0.2587	0.0391	−0.0214
40	0.3690	0.7546	−0.0407	−0.025
60	−0.3165	−0.719	0.0462	0.0365
100	−0.0491	−0.9402	0.0164	0.0472

表 5　　特定时间点的振子的运动情况

t(s)	垂荡位移(m)	垂荡速度(m/s)	角位移(rad)	角速度(rad/s)
10	−0.5954	1.0381	0.0296	−0.056
20	−0.7676	−0.3071	0.0411	−0.0224
40	0.3924	0.8416	−0.0425	−0.0265
60	−0.3367	−0.7959	0.0486	0.0383
100	−0.0415	−1.0292	0.0172	0.0493

6.4 第四题的求解

具体方法与第二题相似。在这里简要介绍针对非线性规划问题我们采用的 sqp 算法和遍历搜索求多变量极值的算法。

6.4.1 sqp 算法原理介绍

对于非线性规划问题，有变量矩阵X和目标函数 P(X)。在选定迭代初值X_0后，在X_0处对 P(X)进行泰勒展开为一系列关于$(X-X_0)$的多项式。这里令$S=X-$

X_0，目标函数可以转换为S的函数 P(S)，原有关于X的约束条件也可以写成 g(x)的形式。运用拉格朗日乘数法，可以解出在满足 P(S)取到局部极值的点S^*。由此进行下一次迭代，令$X_1 = X_0 + S^*$重复执行此操作，直到$X_{n+1} - X_n <$ eps 时算法判定取到了局部的极值，程序停止。eps 是阈值矩阵，算法的精确度与阈值的大小有关。

6.4.1 遍历搜索算法介绍及结果说明

sqp 算法是解决非线性规划问题的有力工具，但也存在弊端。sqp 算法很容易在局部的峰值处终止，然而这未必是期待求得的最值点。对于一些稍复杂的函数，应该对于目标区间进行遍历搜索，不断改变试探的初值，逐渐缩小查找的范围，直至多个试探点在同一点处取到局部最优值，该值即为最值点。

本题有两个待定参量，记为$\mathbf{C} = [\beta_z, \beta_\theta]$。我们令查找的初值$\mathbf{C}_0 = [i, j]$，利用 for 循环使得 i, j 在[0,100000]内以 10000 为步长进行试探，对于每一个[i, j]记下 sqp 算法算得的极值，并且将每个极值点记录在数组 R 中。

对于本题的每一个[i, j]组合，最终都收敛于极值点(50927.684,118.161)，此时功率取到最大值：

$$P_{max} = 273.635\ W.$$

这个结果说明模型的收敛性较好，P 对于任一变量都是一个单峰函数，因而对于每一个试探初值都可以收敛于同一个点。而对于第二题的情况，这个方法将会有更大的作用，因为第二题的结果受初值的影响较大，我们给出的是经过多次放缩优化后的结果。

七 模型分析与评价

7.1 模型灵敏度分析

通过查阅资料了解到，阻尼器阻尼系数测量误差在 1%以内，考虑到实际中阻尼器阻尼系数有误差，我们以最优解的 1%为步长，在最优解的附近分析了模型对各个阻尼系数的灵敏度。

问题二

第一问，PTO 系统平均功率随阻尼系数取值变化曲线如图 16 所示：

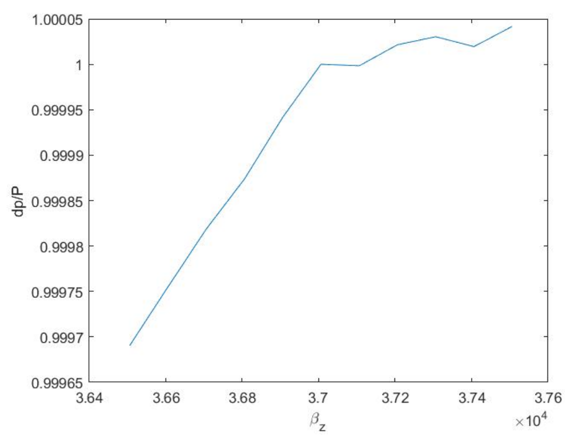


图 16 PTO 系统平均功率随阻尼系数取值变化曲线

可以看出，阻尼系数在的 1%范围内变化时对 P 的影响在 0.1%以内，故最优解稳定性较好，为准确的函数极值，模型的稳健性很好。

第二问：阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比时，PTO 系统平均功率随其比例系数取值变化曲线如图 17 所示：

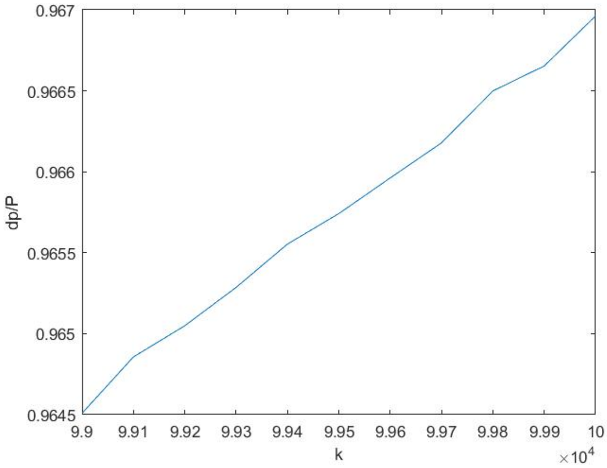


图 17 PTO 系统平均功率随其比例系数取值变化曲线

可以看出，比例系数在 1%的范围内变化时对 P 的影响在 0.1%以内，故最优解稳定性较好，为准确的函数极值，模型的稳健性很好。

第二问：同上，PTO 系统平均功率随其幂指数取值变化曲线如图 18 所示：

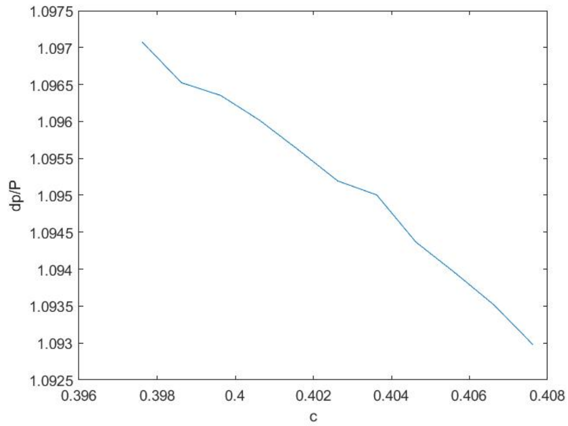


图 18 PTO 系统平均功率随其幂指数取值变化曲线

可以看出，幂指数在 1%的范围内变化时对 P 的影响在 0.1%以内，故最优解稳定性较好，为准确的函数极值，模型的稳健性很好。

问题四

PTO 系统平均功率随直线阻尼器阻尼系数取值变化曲线如图 19 所示：

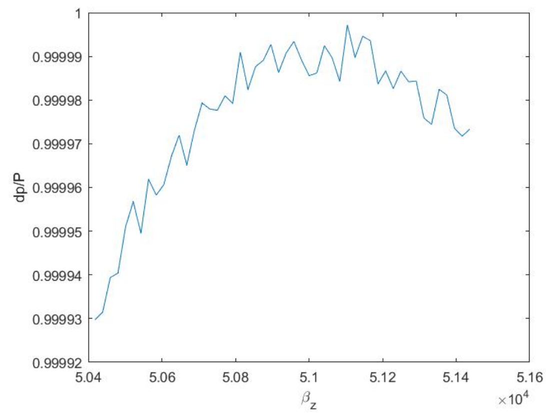


图 19 PTO 系统平均功率随直线阻尼器阻尼系数取值变化曲线

可以看出，直线阻尼器阻尼系数在 1%的范围内变化时对 P 的影响在 0.1%以内，故最优解稳定性较好，为准确的函数极值，模型的稳健性很好。

PTO 系统平均功率随旋转阻尼器阻尼系数取值变化曲线如图 20 所示：

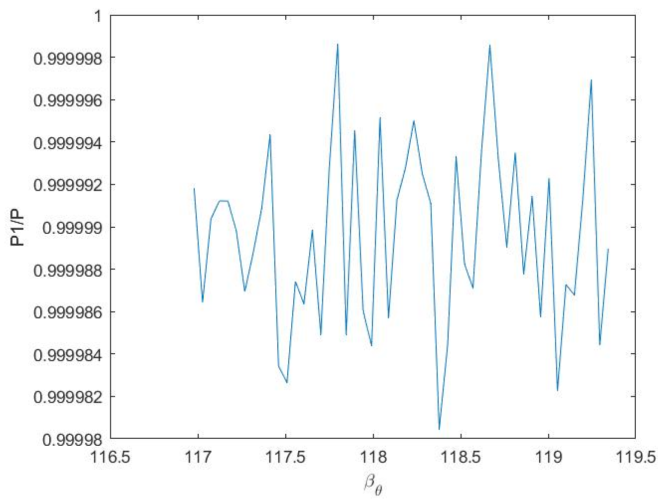


图 20 PTO 系统平均功率随旋转阻尼器阻尼系数取值变化曲线

可以看出，旋转阻尼器阻尼系数在 1%的范围内变化时对 P 的影响在 0.1%以内，故最优解稳定性较好，为准确的函数极值，模型的稳健性很好。

7.2 模型优缺点分析

优点：

1. 本文模型在实际的基础上进行了适当简化处理，利用适当的假设有效减小了计算量，并且物理推导严谨，所得到的运动情况对实践具有参考意义。
2. 在优化方面采用 sqp 算法高效求解单变量及多变量的极值，并且引入了遍历搜索的算法，先采用大步长粗略分析，再小步长精确分析，减少计算量，避免程序终止于局部最优解，使得结果精确度更高。

缺点：

1. 实际情况远比模型复杂。事实上还有其他方向上的自由度，铰接点所在的横坐标也会不断发生变化。
2. 在求解第二问的时候，最终的解往往对初值有较大依赖性，且解的准确性也有待提高。通过不断放缩试探找到最优解需要耗费大量时间。

7.3 模型推广

可以考虑装置在不同自由度下的情形。浮子的形状参数如 R, H_1, H_2等，也可以通过适当的优化调整来使得功率最大化。此外，改变浮子与振子的质量比也有助于体系在波浪的周期性影响下达到更好效果的共振。

本文对波浪能装置的 PTO 系统做了较为完整的分析，综合考虑了多种因素对 PTO 系统功率的影响，因而对实际操作、控制有一定的借鉴意义，能更好地满足新能源领域的开发要求，提高能量转化效率。

参考文献

[1] 黄绪宏,李小军,周龙云,等. 基于能量的非堆积型多颗粒阻尼器减振机理分析[J]. 土木工程学报,2022,55(4):42-54.

[2] 谢惠媚,孟凡泰,徐潜龙,等. 不同形状的多自由度内置 PTO 式波浪能转换装置的性能分析[J]. 可再生能源,2022,40(7):986-994. DOI:10.3969/j.issn.1671-5292.2022.07.020.

[3] 丁松,韩端锋,刘峰,等. 振荡浮子式波浪能装置运动预测数值分析方法[J]. 中国造船,2016,57(1):77-84. DOI:10.3969/j.issn.1000-4882.2016.01.009.

[4] 杨维纮.2014.力学与理论力学（上册）[M].北京：科学出版社.

[5] 舒幼生.2005.力学（物理类）[M].北京：北京大学出版社.

附录

• 支撑材料列表	文件名
问题一(1)代码	/sol11.m
问题一(1)结果	/result1-1.xlsx
问题一(2)代码	/sol12.m
问题一(2)结果	/result1-1.xlsx
问题二(1)代码	/sol21.m
	/averagepower21.m
问题二(2)代码	/sol22.m
	/averagepower22.m
灵敏性检查	
	/sen21.m
	/sen2c1.m
	/sen2c2.m
问题三(1)代码	/sol3.m
问题三(1)结果	/result3.xlsx
问题四(1)代码	/sol4.m
	/averagepower4.m
灵敏性检查	
	/sen41.m
	/sen42.m
图片	/image

基于能量的非堆积型多颗粒阻尼器减振机理分析.pdf
不同形状的多自由度内置 PTO 式波浪能转换装置的性能分析.pdf
振荡浮子式波浪能装置运动预测数值分析方法.pdf

源代码

问题 1

第(1)问

```
w=1.4005
T = 2*pi/w

f =@(x,y)odefun(x,y,w)
tspan=[0:0.2:40*T]
y0=[0,0,0,0]

[x,y]=ode45(f,tspan,y0)   %利用 ode45 求解常微分方程组的数值解

y=round(y*1e4)/1e4     %保留四位小数
R=[]
%写入文件
for i=1:1:size(y)-1
   R = [R;i*0.2,y(i+1,1),y(i+1,3),y(i+1,2)+y(i+1,1),y(i+1,4)+y(i+1,3)]
end
t = table(R)
range = 'A3'
writetable(t,"result1-1.xlsx",'Range',range)

%绘图
figure;plot(x,y(:,1),x,y(:,2))
xlabel("t/s")
ylabel("y/m")
title('y1-浮子的位移')
legend('y1-浮子的位移','y2-振子的位移')

%y1 浮子的位移，y2 振子的位移，y3 浮子的速度，y4 振子的速度
%微分方程求解
function dy=odefun(x,y,w)
dy = zeros(4,1)
dy(1)=y(3)
dy(2)=y(4)
dy(3)=(6250*cos(w*x)-31557*y(1)-656.3616*y(3)+80000*y(2)+10000*y(4))/6201.53
5
dy(4)=(-80000*y(2)-10000*y(4))/2433-(6250*cos(1.4*x)-31557*y(1)-656.3616*y(3)
+80000*y(2)+10000*y(4))/6201.535
end
```

第(2)问

```
w=1.4005
T = 2*pi/w

f =@(x,y)odefun(x,y,w)
tspan=[0:0.2:40*T]
y0=[0,0,0,0]
[x,y]=ode45(f,tspan,y0)%利用 ode45 求解常微分方程组的数值解

y=round(y*1e4)/1e4 %保留四位小数
R=[]
%写入文件
for i=1:1:size(y)-1
    R = [R;i*0.2,y(i+1,1),y(i+1,3),y(i+1,2)+y(i+1,1),y(i+1,4)+y(i+1,3)]
end
t = table(R)
range = 'A3'
writetable(t,"result1-2.xlsx",'Range',range)

plot(x,y(:,1),x,y(:,2))
xlabel("t/s")
legend('y1','y2')

%y1 浮子的位移, y2 振子的位移, y3 浮子的速度, y4 振子的速度
%微分方程求解
function dy=odefun(x,y,w)

dy = zeros(4,1)
dy(1)=y(3)
dy(2)=y(4)
dy(3)=(6250*cos(w*x)-31557*y(1)-656.3616*y(3)+80000*y(2)+sign(y(4))*10000*(a
bs(y(4)))^1.5)/6201.535
dy(4)=(-80000*y(2)-10000*y(2))/2433-(6250*cos(1.4*x)-31557*y(1)-656.3616*y(3)
+80000*y(2)+sign(y(4))*10000*(abs(y(4)))^1.5)/6201.535
end
```

第二题（1）

函数文件:

```
function P=averagepower21(c)
w=2.2143
T = 2*pi/w

%求解振动数值解
f =@(x,y)odefun(x,y,w)
tspan=[0:0.2:40*T]
```

```
y0=[0,0,0,0]
[x,y]=ode45(f,tspan,y0)

%将幂指数和直线阻尼器系数作为两个参数列出微分方程
function dy=odefun(x,y,w)
dy = zeros(4,1)
dy(1)=y(3)
dy(2)=y(4)
dy(3)=(4890*cos(w*x)-31557*y(1)-167.8395*y(3)+80000*y(2)+c*y(4))/6031.992
dy(4)=(-80000*y(2)-c*y(4))/2433-(4890*cos(w*x)-31557*y(1)-167.8395*y(3)+8000
0*y(2)+c*y(4))/6031.992
end

%求平均功率
%检测是否露出圆锥或沉底
Maxi = max(y)
mini = min(y)
if(Maxi(1)>2||mini(1)<-1)
    P  = -20000
else
    z=c.*y(:,4).*y(:,4)
    z=z'
    W=trapz(tspan,z)  %计算总功
    P=-W/(40*T)
end
end
```

主文件：

```
% 主函数
% 利用 GA(Genetic Algorithm)最小化目标函数
ObjFcn = @averagepower21 % 利用@传输目标函数句柄
x0=0 % 初始值
LB = [0]; % 变量下限
UB = [100000]; % 变量上限
[x,fval] = fmincon(ObjFcn,x0,[],[],[],[],LB,UB); % 调用算法，x 为最优值对应的变量取
值，fval 为最优值
disp(x)
disp(fval)
```

灵敏性检验：

```
x=[]
y=[]
for i= 3.650585512111845e+04:0.01e+04:3.750585512111845e+04
    x=[x,i]
    y=[y,averagepower21(i)/(-2.455385933237218e+02)]
end
```

```
plot(x,y)
xlabel('\beta_z')
ylabel('dp/P')
```

第（2）问

函数文件

```
function P=averagepower22(c)
w=2.2143
T=2*pi/w

%求解振动数值解
f =@(x,y)odefun(x,y,w)
tspan=[0:0.2:20*T]
y0=[0,0,0,0]
[x,y]=ode45(f,tspan,y0)
%将幂指数和直线阻尼器系数作为两个参数列出微分方程
function dy=odefun(x,y,w)
dy = zeros(4,1)
dy(1)=y(3)
dy(2)=y(4)
dy(3)=(4890*cos(w*x)-31557*y(1)-167.8395*y(3)+80000*y(2)+sign(y(4))*c(1)*(ab
s(y(4)))^(1+c(2)))/6031.992
dy(4)=(-80000*y(2)-c(1)*y(4))/2433-(4890*cos(w*x)-31557*y(1)-167.8395*y(3)+8
0000*y(2)+sign(y(4))*c(1)*(abs(y(4)))^(1+c(2)))/6031.992
end

%求平均功率
z=c(1).*((abs(y(:,4))).^(c(2))).*(y(:,4).^2)
z=z'
W=trapz(tspan,z)%计算总功
P=-W/(20*T)

end
```

主函数

```
% 主函数
ObjFcn = @averagepower22 % 利用@传输目标函数句柄
global R
R= [];

%遍历初始值
for i = 0:10000:100000
    for j =0:0.1:1
```

```
    x0=[i,j] % 初始值
    LB = [0,0]; % 变量下限
    UB = [100000,1]; % 变量上限
    options = optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp' );
    [xsol,fval] = fmincon(ObjFcn,x0,[],[],[],[],LB,UB,[],options); % 调用 sqp 算法，x 为最优值对应的变量取值，fval 为最优值
    R=[R;xsol,fval];%储存各区域最优解（各个局部极值）
    end
end

% 'TolFun',10^(-6),
```

灵敏性检验

C1:

```
x=[]
y=[]
for i= 98999.9999988288:100:99999.9999988288
    x=[x,i]
    y=[y,averagepower22([i,0.402624414389768])/(-278.1002)];
end
plot(x,y)
xlabel('k')
ylabel('dp/P')
```

C2:

```
x=[]
y=[]
for i= 0.397624414389768:0.001:0.407624414389768
    x=[x,i]
    y=[y,averagepower22([99999.9999988288,i])/(-2.455385933237218e+02)];
end
plot(x,y)
xlabel('c')
ylabel('dp/P')
```

第三题

```
w=1.7152
T = 2*pi/w
f =@(x,y)odefun(x,y,w)
tspan=[0:0.2:40*T]
y0=[0,0,0,0,0,0,0,0]
[x,y]=ode45(f,tspan,y0)

% 数据写入表格
y=round(y*1e4)/1e4
```

```
R=[]
for i=1:1:size(y)-1
    R =
[R;i*0.2,y(i+1,1),y(i+1,5),y(i+1,3),y(i+1,7),y(i+1,1)+y(i+1,2),y(i+1,5)+y(i+
1,6),y(i+1,4),y(i+1,8)]
end
t = table(R)
range = 'A3'
writetable(t,"result3.xlsx",'Range',range)

%画图
plot(x,y(:,3),x,y(:,4))
xlabel("t/s")
ylabel("\theta/rad")
title('角位移-时间关系图')
legend('\theta_1','\theta_2')

function dy=odefun(x,y,w)
%y1 浮子的位移，y2 振子的位移，y3 浮子的角度，y4 振子的角度
dy = zeros(8,1);
dy(1)=y(5);
dy(2)=y(6);
dy(3)=y(7);
dy(4)=y(8);
dy(5) =
(3640*cos(w*x)-1025*9.8*pi*y(1)+(80000*y(2)+y(6)*10000)*cos(y(4))-683.4558*y
(5)+2433*9.8*(1-cos(y(4))))/(1028.876+4866);
dy(6) =
9.8*(1-cos(y(4)))-cos(y(4))*((3640*cos(w*x)-1025*9.8*pi*y(1)+(80000*y(2)+y(6)
*10000)*cos(y(4))-683.4558*y(5)+2433*9.8*(1-cos(y(4))))/(1028.876+4866))+(0.
4519575+y(2))*(y(8))*(y(8))-(80000*y(2)+y(6)*10000)/2433;
dy(7) =
(1690*cos(w*x)-654.3383*y(7)-8890.7*y(3)+4866*1.189*sin(y(3))*(3640*cos(w*x)
-1025*9.8*pi*y(1)+(80000*y(2)+y(6)*10000)*cos(y(4))-683.4558*y(5)+2433*9.8*(
1-cos(y(4))))/(1028.876+4866))/(7001.914+14340.6);
dy(8) =
(9.8*sin(y(4))+sin(y(4))*(3640*cos(w*x)-1025*9.8*pi*y(1)+(80000*y(2)+y(6)*10
000)*cos(y(4))-683.4558*y(5)+2433*9.8*(1-cos(y(4))))/(1028.876+4866)-2*y(6)*
y(8)-(1000*(y(8)-y(7))+250000*(y(4)-y(3)))/(2433*(y(2)+0.4519575)))/(y(2)+0.
4519575);
end
```

第四题

函数：

```
function P=averagepower4(c)
w=1.9806
T=2*pi/w

%求解振动数值解
f =@(x,y)odefun(x,y,w)
tspan=[0:0.2:20*T]
y0=[0,0,0,0,0,0,0,0]
[x,y]=ode45(f,tspan,y0)
%做第二题记得改参数

function dy=odefun(x,y,w)
dy = zeros(8,1);
dy(1)=y(5);
dy(2)=y(6);
dy(3)=y(7);
dy(4)=y(8);
dy(5) =
(1760*cos(w*x)-1025*9.8*pi*y(1)+(80000*y(2)+y(6)*c(1))*cos(y(4))-528.5018*y(
5)+2433*9.8*(1-cos(y(4))))/(1091.099+4866);
dy(6) =
9.8*(1-cos(y(4)))-cos(y(4))*((1760*cos(w*x)-1025*9.8*pi*y(1)+(80000*y(2)+y(6)
*c(1))*cos(y(4))-528.5018*y(5)+2433*9.8*(1-cos(y(4))))/(1091.099+4866))+(0.4
519575+y(2))*(y(8))*(y(8))-(80000*y(2)+y(6)*c(1))/2433;
dy(7) =
(2140*cos(w*x)-1655.909*y(7)-8890.7*y(3)+4866*1.189*sin(y(3))*((1760*cos(w*x)
-1025*9.8*pi*y(1)+(80000*y(2)+y(6)*c(1))*cos(y(4))-528.5018*y(5)+2433*9.8*(1
-cos(y(4))))/(1091.099+4866)))/(7142.493+14340.6);
dy(8) =
(9.8*sin(y(4))+sin(y(4))*((1760*cos(w*x)-1025*9.8*pi*y(1)+(80000*y(2)+y(6)*c
(1))*cos(y(4))-528.5018*y(5)+2433*9.8*(1-cos(y(4))))/(1091.099+4866))-2*y(6)
*y(8)-(c(2)*(y(8)-y(7))+250000*(y(4)-y(3)))/(2433*(y(2)+0.4519575)))/(y(2)+0.
4519575);
end

%求平均功率
Maxi = max(y(:,1))
mini = min(y(:,1))
if(Maxi(1)>2||mini(1)<-1)
    P = -20000
else
z=c(1).*y(:,6).^2+c(2)*(y(:,8)-y(:,7)).^2
z=z'
```

```
W=trapz(tspan,z)
P=-W/(20*T)
end
end
```

主文件

```
% 主函数

ObjFcn = @averagepower4 % 利用@传输目标函数句柄
global R
R= [];

for i = 0:10000:100000
    for j =0:10000:100000
    x0=[0,0] % 初始值
    LB = [0,0]; % 变量下限
    UB = [100000,100000]; % 变量上限
    options = optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp' );
    [x,fval] = fmincon(ObjFcn,x0,[],[],[],[],LB,UB,[],options); % 调用算法，x 为最优值对应的变量取值，fval 为最优值
    R=[R;x,fval];
    end
end
```

灵敏性检查

```
C1:
x=[]
y=[]
for i= linspace(50927.6843129616*0.99,50927.6843129616*1.01,50)
    x=[x,i]
    y=[y,averagepower4([i,118.161128422219])/(-273.635404456033)];
end
plot(x,y)
xlabel('\beta_z')
ylabel('P1/P')
```

C2:

```
%sen42
x=[]
y=[]
for i= linspace(118.161128422219*0.99,118.161128422219*1.01,50)
    x=[x,i]
    y=[y,averagepower4([51000,i])];
end
```

```
plot(x,y)
```