3-1 二元假设如下：

$$H_0: x = n$$
$$H_1: x = s + n$$

其中 s 与 n 是统计独立的随机变量，它们的概率密度函数分别是

$$f_s(s) = \frac{1}{2} e^{-|s|}$$
$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2/2}$$

（1） 求似然比统计量；

（2） 若采用最小平均错误概率准则，求检测器的门限与假设先验概率之间的关系；

（3） 若采用纽曼-皮尔逊准则，求检测门限与虚警概率的函数关系.

解：（1）最大似然函数为：

$$H_0: f(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$
$$H_1: f(x|H_1) = f_s(x) * f_n(x)$$

$$\begin{aligned}
H_1: f(x|H_1) &= f_s(x) * f_n(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x-n) f_n(n) dn \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-n|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2/2} dn \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x+n-n^2/2} dn + \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-n+x-n^2/2} dn \\
&= \frac{1}{2} e^{-x+\frac{1}{2}} \Phi(x-1) + \frac{1}{2} e^{x+\frac{1}{2}} [1 - \Phi(x+1)]
\end{aligned}$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}} \Phi(x-1) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}} [1 - \Phi(x+1)]$$

（2）假设先验概率分别为 $P(H_0), P(H_1)$，则检测门限为

$$th = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

（3）设虚警概率为 α，则

$$\alpha = P(D_1|H_0) = \int_{th'}^{+\infty} f(x|H_0) dx = \int_{th'}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - \Phi(th')$$

其中 th' 为检测门限

3-5 二元通信系统观测模型为

$$H_0: x = -1 + n$$
$$H_1: x = 1 + n$$

其中 n 是零均值，方差为 $\sigma_n^2 = 0.5$ 的高斯白噪声，若两种假设的先验概率相等，判决风险函

数为

$$C_{00}=1, C_{11}=1, C_{10}=5, C_{01}=5$$

求贝叶斯判决规则和平均风险。

解：H_0 假设下 $x \sim N(-1,0.5)$

H_1 假设下 $x \sim N(1,0.5)$

H_0 假设下 $x \sim N(-1,0.5)$

$$\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)}=\exp(\frac{2x}{\sigma_n^2}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{p(H_1)(C_{01}-C_{11})}$$

$$e^{4x} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 = th \Rightarrow x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 = th^{'}$$

$$P(D_0|H_0)=\int_{-\infty}^{0} f(x|H_0)dx=\Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_1|H_0)=1-P(P(D_0|H_0)=1-\Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_0|H_1)=\int_{0}^{+\infty} f(x|H_1)dx=1-\Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_1|H_1)=1-P(P(D_0|H_1)=\Phi(\sqrt{2})$$

$$\therefore \overline{C}=P(H_0)[C_{00}P(D_0|H_0)+C_{10}P(D_1|H_0)]+P(H_1)[C_{01}P(D_0|H_1)+C_{11}P(D_1|H_1)]$$

$$=5-4\Phi(\sqrt{2})=1.3148$$

3-7 二元假设如下：

$$H_0: \quad x=n$$

$$H_1: \quad x=A+n$$

式中，A 为常数，噪声 n 的概率密度函数为

$$f_n(n)=\frac{1}{\pi C}\frac{1}{1+(n/C)^2} \qquad -\infty<n<+\infty$$

若 $P(H_i)=1/2 \quad (i=0,1)$。

证明：

（1） 最小错误概率检验的判决规则为：如果 $x \ge A/2$，判为 H_1，反之，判为 H_0。

（2） 错判概率为

$$P_e=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{A}{2C})$$

解：（1）

$$f(x|H_0)=\frac{1}{\pi C}\frac{1}{1+(x/C)^2}$$

$$f(x|H_1)=\frac{1}{\pi C}\frac{1}{1+((A+x)/C)^2}$$

判决准则为：

$$\frac{f\left(x\middle|H_1\right)}{f\left(x\middle|H_0\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P\left(H_0\right)}{P\left(H_1\right)}=1$$

化简得到判决规则： $x\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}A/2$

（2）错判概率为：

$$p_e=p(H_0)\int_{-\infty}^{A/2}f(x\,|\,H_0)dx+p(H_1)\int_{A/2}^{+\infty}f(x\,|\,H_1)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{A}{2C})$$

3-9 设有如下二元假设

$$\begin{aligned}H_0:&\quad x_i=n_i\\H_1:&\quad x_i=1+n_i\end{aligned}\qquad i=1,2,\cdots,10$$

n_i 是均值为 0，方差为 0.09 的高斯白噪声。现令虚警概率 $\alpha=10^{-8}$，如判决规则定为

$$G=\sum_{i=1}^{10}x_i\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}G_T$$

试求 G_T 的值以及相应的检测概率。

解：由条件得： $G\mid H_0 \sim N(0,0,$ $\quad G\mid H_1\sim N(10,0.9)$

$$p_{fa}=p(G\,|\,H_0)=\int_{G_T}^{+\infty}f(G\,|\,H_0)dG=1-\Phi\left(\frac{G_T}{\sqrt{0.9}}\right)=10^{-8}$$

求得： $G_T=5.3241$

从而可求：

$$p_D=p(G\,|\,H_1)=\int_{G_T}^{+\infty}f(G\,|\,H_1)dG=1-\Phi(\frac{G_T-10}{\sqrt{0.9}})=1-4.135\times10^{-7}$$

3-13 二元假设如下：

$$\begin{aligned}H_0:&\ f\left(x_i\middle|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_i^{\,2}}{2}\right)\\H_1:&\ f\left(x_i\middle|H_1\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(x_i-1\right)^2}{8}\right]\end{aligned}，\quad i=1,2,\cdots$$

已知 $\alpha=\beta=0.1$， $P(H_i)=1/2\quad\left(i=0,1\right)$。

（1）求序贯检测的判决规则。

（2）求序贯检测所需的平均样本数。

（3）若采用固定样本数的检测器，求满足性能要求所需的样本数。

解：（1）观测样本为 i 时的似然比函数为：

$$\lambda(\vec{x_i}) = \prod_{j=1}^{i} \frac{f(\vec{x_i} \mid H_1)}{f(\vec{x_i} \mid H_0)} = \frac{(\frac{1}{2})^i \exp[-\sum_{j=1}^{i} \frac{(x_j-1)^2}{8}]}{\exp[-\sum_{j=1}^{i} \frac{x_j^{\ 2}}{2}]}$$

取对数：$\ln\lambda(\vec{x_i}) = \ln(\frac{1}{2})^i + \sum_{j=1}^{i} \frac{-(x_j-1)^2}{8} + \frac{x_j^{\ 2}}{2}$

$th_1 = \frac{1-\beta}{\alpha} = 9$，$th_0 = \frac{1-\alpha}{\beta} = \frac{1}{9}$

$\ln th_0 = -2.197$，$\ln th_1 = 2.197$

对数似然比判决规则为：

$$\begin{cases} \ln\lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_i\right) \ge 2.197 & \text{判为} H_1 \\ \ln\lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_i\right) \le -2.197 & \text{判为} H_0 \\ -2.197 < \ln\lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_i\right) < 2.197 & \text{接收下一个数据} \end{cases}$$

（2）$\ln\lambda(x) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2$

$$E\{\ln\lambda(x) \mid H_0\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ln\lambda(x) f(x \mid H_0) dx = -0.44$$

$$E\{\ln\lambda(x) \mid H_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ln\lambda(x) f(x \mid H_1) dx = 1.31$$

$$E\{N \mid H_1\} \approx \frac{(1-\beta)\ln th_1 + \alpha \ln th_0}{E\{\ln\lambda(x) \mid H_1\}} = 1.34$$

$$E\{N \mid H_0\} \approx \frac{\alpha \ln th_1 + (1-\alpha)\ln th_0}{E\{\ln\lambda(x) \mid H_0\}} = 3.97$$

$$E\{N\} = \frac{\alpha \ln th_1 + (1-\alpha)\ln th_0}{E\{\ln\lambda(x) \mid H_0\}} P(H_0) + \frac{(1-\beta)\ln th_1 + \alpha \ln th_0}{E\{\ln\lambda(x) \mid H_1\}} P(H_1) = 2.656$$

所以 N=3

（3）假设固定样本数为 N，似然比判决准则为：

$$\lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_N\right)=\frac{f\left(x_1,x_2,\cdots,x_i\left|H_1\right.\right)}{f\left(x_1,x_2,\cdots,x_i\left|H_0\right.\right)}=\prod_{j=1}^{N}\frac{f\left(x_j\left|H_1\right.\right)}{f\left(x_j\left|H_0\right.\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{p(H_0)}{p(H_1)}$$

$$\ln\lambda(\vec{x}_N)=\ln(\frac{1}{2})^N+\sum_{j=1}^{N}\frac{-(x_j-1)^2}{8}+\frac{x_j^{\ 2}}{2}$$

判决规则为：

$$G=\ln\lambda(\vec{x}_N)=\ln(\frac{1}{2})^N+\sum_{j=1}^{N}\frac{-(x_j-1)^2}{8}+\frac{x_j^{\ 2}}{2}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0$$

由虚警和漏警条件

$$p(D_1\,|\,H_0)=\int_0^{+\infty}f(G\,|\,H_0)dG\le 0.1$$

$$p(D_0\,|\,H_1)=\int_{-\infty}^{0}f(G\,|\,H_1)dG\le 0.1$$

可确定 N