31、 (1) $f_{\sigma^2}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

明显为指数族，取 $\varphi=-\frac{1}{2\sigma^2}$，自然参数空间为 $\{\varphi: -\infty<\varphi<0\}$

作为R子集有内点。

∴ $T(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 为 σ^2 的充分完全统计量。

(2) ① 注意到 $\frac{1}{n}T(X)$ 为 σ^2 的无偏估计，且为充分完全统计量。

$$E(T(X)) = \frac{1}{n}E(X_1^2+\cdots+X_n^2) = \frac{1}{n}EX_1^2+\cdots+\frac{1}{n}EX_n^2$$

$$= n\times\frac{1}{n}\times(Var(X_1)-(EX_1)^2) = Var(X_1)-0=\sigma^2$$

记 $\tilde{T}(X)=\frac{1}{n}T(X)$，考查 $E(\tilde{T}(X))^2$：

$$E(\tilde{T}(X))^2 = E\left(\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^4 + \sum_{i\neq j} X_i^2X_j^2\right]\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\times n\, EX_1^4 + \frac{n(n-1)}{n^2}E(X_1^2X_2^2)$$

$$=\frac{1}{n}EX_1^4+\frac{n-1}{n}(EX_1^2EX_2^2+Cov(X_1^2,X_2^2))$$

$$=\frac{1}{n}\times3\sigma^4+\frac{n-1}{n}\times(\sigma^2\times\sigma^2+0)$$

$$=\frac{n+2}{n}\sigma^4$$

$$EX_1^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=3\sigma^2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot x^2\,dx$$

$$=3\sigma^2\cdot\sigma^2=3\sigma^4$$

于是 $\frac{n}{n+2}(\tilde{T}(X))^2$ 为 σ^4 无偏估计，

再由 L-S 定理，~~其为UMVUE~~.

$\frac{3n}{n+2}(\tilde{T}(X))^2$ 为 $3\sigma^4$ UMVUE

$= \frac{3}{n(n+2)}T^2(X)$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

$T(x)/\sigma^2 \sim \chi^2_n$，即为常数显然.

② 记 $Y = \Big(\underbrace{\frac{T(x)}{\sigma^2}}_{\sim \chi^2_n}\Big)^r$，验证 EY 为常数 (for $\forall r$) 并计算：

$$EY = \int_0^{+\infty} x^r \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\,dx$$

$$\overset{\text{记 } t=\frac{1}{2}x}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} \frac{2^r}{\Gamma(\frac{n}{2})} t^{r+\frac{n}{2}-1} e^{-t}\,dt$$

$$= \frac{2^r}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \Gamma(r+\frac{n}{2}).$$

令 $r=\frac{1}{2}$，有 $E\Big(\underbrace{\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot T^{\frac{1}{2}}}_{\text{为 } T(x) \text{ 的函数，为 } \sigma \text{ 无偏估计} \Rightarrow \text{UMVUE . for } \sigma}\Big) = \sigma$

注：可由上结论令 $r=2$ 得①答案.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

36. $X_i \sim i.i.d.\ Exp(\theta)$.

$T=\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n,\theta)$ 为充分完全统计量.

现需寻找 $h(T)$. 使 $E(h(T))=e^{-\theta\tau}$

$$E(h(T))=\int_0^{+\infty} h(t)\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\theta t}dt$$

$$=e^{-\theta\tau}\int_0^{+\infty} h(t)\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\theta(t-\tau)}dt$$

$$=e^{-\theta\tau}$$

只需使积分为1. 取 $h(t)=\frac{(t-\tau)^{n-1}}{t^{n-1}}I_{(\tau,+\infty)}(t)$ 即可

(更常规的做法是老老实实计算 $E[I_{(X_1>\tau)}|T]$ 的表达式)

37. (1) $$f_{\theta_1,\theta_2}(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n\prod_{i=1}^n I_{(\theta_1<x_i<\theta_2)}$$

$$=\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}I_{(\theta_1<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta_2)}$$

由MLE定义, 取 $\hat\theta_1=X_{(1)}$, $\hat\theta_2=X_{(n)}$

(2) $E\hat\theta_2=EX_{(n)}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}x\,n\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta_2-\theta_1}dx=\theta_2-\frac{1}{n+1}(\theta_2-\theta_1)$

同理, $E\hat\theta_1=\theta_1+\frac{1}{n+1}(\theta_2-\theta_1)$

于是可得修正后无偏估计: for θ_1: $\hat\theta_1^*=\frac{n}{n-1}\hat\theta_1-\frac{1}{n-1}\hat\theta_2$

for θ_2: $\hat\theta_2^*=\frac{n}{n-1}\hat\theta_2-\frac{1}{n-1}\hat\theta_1$

(3). 由L-S定理, $\hat\theta_1^*$ 和 $\hat\theta_2^*$ 为 θ_1,θ_2 的UMVUE

(4) 先证明 $(\hat\theta_1,\hat\theta_2)$ 为 (θ_1,θ_2) 的充分完全统计量.

① 充分

$f_{\theta_1,\theta_2}(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}I_{(\theta_1<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta_2)}$

由因子分解定理可得

② 完全: 若 $g(x_{(1)},x_{(n)})$ 满足 $\overbrace{E[g(x_{(1)},x_{(n)})]=0}^{\text{for }\forall\theta_1,\theta_2}$

即 $\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{x_{(1)}}^{\theta_2}g(x_{(1)},x_{(n)})(x_{(n)}-x_{(1)})^{n-2}dx_{(n)}dx_{(1)}$

对 θ_1 求导: $\int_{\theta_1}^{\theta_2}g(\theta_1,x_{(n)})(x_{(n)}-\theta_1)^{n-2}dx_{(n)}\overset{a.s.}{=}0$

再对 θ_2 求导: $(\theta_2-\theta_1)^{n-2}g(\theta_1,\theta_2)=0$ a.s.

$\therefore\ g(\theta_1,\theta_2)=0$ a.s.

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

所以 $\frac{\hat{\theta}_1^*+\hat{\theta}_2^*}{2}$ 、 $\hat{\theta}_2^*-\hat{\theta}_1^*$ 为 充分完全统计量的函数.

又∵ $E\hat{\theta}_1^*=\theta_1$ $E\hat{\theta}_2^*=\theta_2$

∴ $E\frac{\hat{\theta}_1^*+\hat{\theta}_2^*}{2}=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ $E(\hat{\theta}_2^*-\hat{\theta}_1^*)=\theta_2-\theta_1$

由L-S定理，分别为 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ 及 $\theta_2-\theta_1$ 的UMVUE.

46、 $f_{X_{(3)}}(x)=\frac{3x^2}{\theta^3}$ $0\le x\le\theta$ ， $f_{X_{(1)}}(x)=\frac{3(\theta-x)^2}{\theta^3}$ ， $0\le x\le\theta$

① $E(\frac{4}{3}X_{(3)})=\frac{4}{3}\int_0^\theta\frac{3x^2}{\theta^3}x\,dx=\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\theta=\theta$

$E((\frac{4}{3}X_{(3)})^2)=\frac{16}{9}E(X_{(3)}^2)=\frac{16}{9}\int_0^\theta\frac{3x^2}{\theta^3}x^2dx=\frac{16}{15}\theta^2$

∴ $Var(\frac{4}{3}X_{(3)})=\frac{16}{15}\theta^2-\theta^2=\frac{1}{15}\theta^2$

② $E(4X_{(1)})=4\int_0^\theta\frac{3(1-\frac{x}{\theta})^2}{\theta}\cdot x\,dx=12\times\frac{1}{12}\theta=\theta$

$E((4X_{(1)})^2)=16\int_0^\theta\frac{3(1-\frac{x}{\theta})^2}{\theta}\cdot x^2dx=16\times\frac{3}{30}\theta^2=\frac{8}{5}\theta^2$

$Var(4X_{(1)})=\frac{3}{5}\theta^2$

∵ $Var(\frac{4}{3}X_{(3)})<Var(4X_{(1)})$

∴ $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 更有效

47、 $E(c_1\hat{\theta}_1+c_2\hat{\theta}_2)=c_1E\hat{\theta}_1+c_2E\hat{\theta}_2=(c_1+c_2)\theta=\theta\Rightarrow c_1+c_2=1$

$Var(c_1\hat{\theta}_1+c_2\hat{\theta}_2)=c_1^2Var(\hat{\theta}_1)+c_2^2Var(\hat{\theta}_2)=(2c_1^2+c_2^2)Var(\hat{\theta}_2)$

$=(2c_1^2+(1-c_1)^2)Var(\hat{\theta}_2)=(3c_1^2-2c_1+1)Var(\hat{\theta}_2)$

取 $c_1=\frac{1}{3}$ 时，其值最小，为 $\frac{2}{3}Var(\hat{\theta}_2)$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

48、 $Var(c_1\hat{a}_1+c_2\hat{a}_2)=E(c_1\hat{a}_1+c_2\hat{a}_2)^2-a^2$

$$=c_1^2E\hat{a}_1^2+c_2^2E\hat{a}_2^2+2c_1c_2E\hat{a}_1\hat{a}_2-a^2$$

$$=c_1^2(\sigma_1^2+a^2)+c_2^2(\sigma_2^2+a^2)+2c_1c_2(\rho\sigma_1\sigma_2+a^2)-a^2$$

$$=(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)c_1^2+2(\rho\sigma_1\sigma_2-\sigma_2^2)c_1+\sigma_2^2$$

1) $\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2=0 \Rightarrow Var(\hat{a}_1-\hat{a}_2)=0$ $\therefore \hat{a}_1=\hat{a}_2$ a.s.，$c_1\hat{a}_1+c_2\hat{a}_2=\hat{a}_1$ a.s.，$\forall c_1, c_2$ 可任取（若认为题中"="是a.s.意义下，可认为此情况不会出现）

2) $\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2\neq 0$ 时 当 $0<\dfrac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}<1$，即 $\rho\sigma_1\sigma_2<\sigma_1^2$ 且 $\rho\sigma_1\sigma_2<\sigma_2^2$ 时，

方差最小，此时 $c_1=\dfrac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$，$c_2=\dfrac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$.

⊕否则函数在端点处取到极值。而 $c_1>0$，$c_2>0$，$c_1+c_2=1$
故 $c_1\in(0,1)$，无法取到端点，
故无最小值。

补充：证明：对于统计量 $T(X)$，有 $Cov(X-E(X|T),E(X|T))=0$

证明：$Cov(X-E(X|T),E(X|T))$

$$=E\{[X-E(X|T)-E(X-E(X|T))]\cdot[E(X|T)-E(E(X|T))]\}$$

$$=E\{[X-E(X|T)]\cdot[E(X|T)-EX]\}$$

$$=E(X\cdot E(X|T)-X\cdot EX-E^2(X|T)+EX\cdot E(X|T))$$

$$=E(X\cdot E(X|T)-E^2(X|T))$$

$$=E(E(X E(X|T)|T))-E(E^2(X|T))$$

$$=E(E(X|T)\cdot E(X|T))-E(E^2(X|T))$$

$$=0$$