中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

52、(1) $f(x_1,\cdots,x_n) = \prod_{i=1}^n \lambda^{-1} e^{-\frac{x_i-\mu}{\lambda}} I_{(x_i>\mu)}$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}e^{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^n e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i} I_{(x_{(1)}>\mu)}$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}e^{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^n e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_{(i)}} I_{(x_{(1)}>\mu)} \cdot 1$$

$$= g_{(\lambda,\mu)}\left(x_{(1)}, \sum_{i=1}^n x_{(i)}\right) \cdot h(x_1,\cdots,x_n)$$

由因子分解定理可知，$x_{(1)}$ & $\sum_{i=1}^n x_{(i)}$ 为充分统计量。

(2) for fixed λ: ① $X_{(1)}$ 为 μ 的充分完全统计量

a) 充分：$f_\mu(x_1,\cdots,x_n) = \left(\frac{1}{\lambda}e^{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^n e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i} I_{(x_{(1)}>\mu)}$

$$= g_\mu(x_{(1)}) \cdot h(x_1,\cdots,x_n)$$

由因子分解定理立得.

b) 完全：$E[\varphi(X_{(1)})]=0$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cdot n\left(\int_x^{+\infty} \lambda^{-1} e^{-\frac{t-\mu}{\lambda}} dt\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}} I_{(x>\mu)}\, dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\mu^{+\infty} \varphi(x) \cdot \underbrace{n\left(\int_x^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt\right)^{n-1} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}}_{\tilde{f}(x)} dx = 0$$

对 μ 求导　　(显然 >0)

$\varphi(\mu)\cdot \tilde{f}(\mu) = 0$ a.s.

$\varphi(\mu) = 0$ a.s.

② $\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$ 与 μ 无关

$$\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$$
$$= \sum_{i=1}^n ((X_i-\mu) - (X_{(1)}-\mu))$$
$$= \sum_{i=1}^n (Y_i - (Y_{(1)}))$$

而 $Y_i \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$

故 Y_i、$Y_{(1)}$ 和 μ 无关

∴ $\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$ 与 μ 无关

(From ①&②) ③ 由 Basu 定理，独立性立得.

由于对 $\forall\lambda$，独立性成立，故对 $\forall(\lambda,\mu)$，独立性成立.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

$X_1, \cdots, X_n \sim i.i.d.\ N(\mu, \sigma^2)$

53、For fixed σ:

① $\bar{X}$ 为 μ 的充分完全统计量

a) 充分：

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right)^n e^{\frac{n\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$= \underbrace{\qquad\qquad}_{g_\mu(\bar{x})} \cdot \underbrace{\qquad}_{h(\vec{x})} \quad \text{(Factorization Theorem...)}$$

b) 完全：

上式化为指数族自然形式：

$$\varphi = -\frac{\mu}{2\sigma^2} \qquad C^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \qquad h(\vec{x}) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}$$

$\Theta^* = \{\varphi = -\frac{\mu}{2\sigma^2} : \mu \in R\} = R$

∵有内点　∴ $\bar{X}$ 为 μ 的完全统计量.

② $Y_i = X_i - \mu$，$Y_i \sim N(0, \sigma^2)$ 与 μ 无关

∴ $Y_{(n)} - Y_{(1)} = X_{(n)} - X_{(1)}$ 与 μ 无关

③ 由①&② 以及 Basu 定理、可证 独立性成立、

∵对 $\forall\sigma$，关于 a 独立性成立

∴对 $\forall(\sigma, a)$ 独立性成立.

Scanned by CamScanner

Fixed b:

55、方法一： ① $\bar{X}$ 为 a 的充分完全统计量（略）

② ξ 与 a 无关

令 $Y_i = X_i - a \sim \text{i.i.d. } N(0, b^2)$ （与 a 无关）

$$\xi = f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 + c, \dots, x_n + c)$$

$$\overset{c:=-a}{=} \tilde{f}(y_1, \dots, y_n) \quad \text{（与 } a \text{ 无关）}$$

由 Basu Thm. $\xi \perp \bar{X}$ 又：for $\forall b$ 成立 ∴ for $\forall (b, a)$ 成立.

方法二：

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \tilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 + c \\ \vdots \\ x_n + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c\mathbb{1}_n = X + c\mathbb{1}_n$$

$$Y = AX, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \frac{1}{\sqrt{n}}, & \cdots, & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ A为正交阵

$$\tilde{Y} = A\tilde{X} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}(X + c\mathbb{1}_n) = \begin{pmatrix} A_1 X + A_1(c\mathbb{1}_n) \\ A_2 X \\ \vdots \\ A_n X \end{pmatrix}$$

∵ $A_1 \in L(\mathbb{1}_n)$ 且 $A_i \perp A_1 \ (i \neq 1)$ ∴ $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$

$$\xi = f(X) = f(A^{-1}Y) = g(Y)$$

$$\| $$

$$f(X + c\mathbb{1}_n) = f(\tilde{X}) = f(A^{-1}\tilde{Y}) = g(\tilde{Y})$$

$\xi = g(y_1, \dots, y_n) = g(\tilde{y}_1, y_2, \dots, y_n)$ 故 ξ 不随 Y_1 变化而变化

ξ 与 Y_1 无关，仅依赖于 $Y_2, \dots, Y_n$

$\bar{X}$ 仅依赖于 Y_1.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

5、(1) $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$

$E\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \times n EX = EX = \theta$

(2) $\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{2n} X_{(n)}$

$E\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{2n} EX_{(n)} = \frac{n+1}{2n} \cdot \int_0^{2\theta} x \left(\frac{x}{2\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{2\theta} dx \overset{t=\frac{x}{2\theta}}{=} \frac{n+1}{2} \cdot 2\theta \int_0^1 t^n dt = \theta$

综上，$\hat{\theta}_1$ & $\hat{\theta}_2$ 均为无偏估计

(3) ① $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{n} Var(X)$ $X \sim U(0, 2\theta)$

$= \frac{1}{n} \times \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\theta^2}{n}$

② $Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{n+1}{2n} X_{(n)}\right) = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 Var(X_{(n)})$

而 $EX_{(n)}^2 = \int_0^{2\theta} x^2 \cdot n \left(\frac{x}{2\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{2\theta} dx = n(2\theta)^2 \int_0^{2\theta} \left(\frac{x}{2\theta}\right)^{n+1} d\left(\frac{x}{2\theta}\right) = n(2\theta)^2 \times \frac{1}{n+2}$

$\therefore Var(X_{(n)}) = EX_{(n)}^2 - (EX_{(n)})^2 = \frac{4n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{2n}{n+1}\theta\right)^2 = \frac{4n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$

$\Rightarrow Var(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{3n} \cdot \theta^2$

$Var(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{n(n+2)} \theta^2$

当 $n=1$ 时，相等
当 $n>1$ 时，$Var(\hat{\theta}_2)$ 更小.
故 $\hat{\theta}_2$ 更有效

6、 $X \sim B(k, p)$ $0<p<1$

$EX = kp$

$Var(X) = kp(1-p)$

$\frac{Var(X)}{EX} = 1-p$

$$\begin{cases} p = 1 - \frac{Var(X)}{EX} \\ k = \frac{EX}{p} = \frac{(EX)^2}{EX - Var(X)} \end{cases}$$

代入矩估计量：

$\hat{p} = 1 - \frac{m_{n2}}{a_{n1}}$

$\hat{k} = \frac{a_{n1}^2}{a_{n1} - m_{n2}}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

7. ① 若 X：$P(X=k) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \cdot \frac{p^k}{k}$ $0<p<1$ $k=1,2,3,\cdots$

$EX = \sum_{i=1}^{+\infty} k \cdot P(X=k) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{+\infty} p^k = -\frac{1}{\ln(1-p)} \cdot \frac{p}{1-p}$

$EX^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} k^2 \cdot P(X=k) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{+\infty} k p^k = -\frac{1}{\ln(1-p)} \cdot \frac{p}{(1-p)^2}$

两式相除可得. $\frac{EX}{EX^2} = 1-p$

② 代入矩估计量，可得

$$\hat{p} = 1 - \frac{a_{n1}}{a_{n2}}.$$

8. (1) $E|X| = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \sigma$

$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E|X|$

$\therefore \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right)$

(2) $Var(X) = \sigma^2$

$\therefore \sigma = \sqrt{Var(X)}$

代入矩估计量.

$\hat{\sigma} = \sqrt{m_{n2}}$

9. $P(X>1) = 1 - \phi\left(\frac{1-a}{\sigma}\right)$

$\therefore \hat{P}(X>1) = 1 - \phi\left(\frac{1-a_{n1}}{(m_{n2})^{1/2}}\right)$

或

$P(X>1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

$\hat{P}(X>1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi m_{n2}}} e^{-\frac{(x-a_{n1})^2}{2m_{n2}}} dx$