中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

1、 σ已知时，μ的置信区间为 $[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}]$

代入数据计算：$\bar{X}=4.7832$，$\sigma=0.01$ & $\alpha=0.05$ $\therefore u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$　$n=5$

$\therefore$ CI：$[4.7744, 4.7920]$

2、 未知时，代入公式 $[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})]$

$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\bar{X})^2}$，$n=5$，$\bar{X}=4.7832$，$t_4(0.025)=2.7764$、$t_4(0.005)=4.6041$

0.95 置信区间　$[4.7702, 4.7962]$

0.99 置信区间　$[4.7616, 4.8048]$

5、 公式：$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}]$

长度：$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{8}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\le L$，故 $n\geq(\frac{8u_{\frac{\alpha}{2}}}{L})^2=\frac{64u_{\frac{\alpha}{2}}^2}{L^2}$

至少应为 $\lceil\frac{64u_{\frac{\alpha}{2}}^2}{L^2}\rceil$

6、

(1) $$f_a(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\right)^m e^{-\frac{\sum_{i=1}^m(x_i-a)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\right)^n e^{-\frac{\sum_{j=1}^n(y_j-a)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{m+n}\frac{1}{\sigma_1^m\sigma_2^n}e^{-(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{c^2}{2\sigma_2^2})a^2}\cdot e^{\frac{a}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^m x_i+\frac{ac}{\sigma_2^2}\sum_{j=1}^n y_j}\cdot e^{-(\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^m x_i^2+\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{j=1}^n y_j^2)}$$

$$=C(\theta)\cdot e^{\Theta(\theta)T(x)}\cdot h(x)$$

故为指数族。　又$\because$ $\Theta^*=\{a: a\in R\}$ 有内点，$\therefore T(x)$为充分完全统计量。

$E[T(x)]=\frac{m}{\sigma_1^2}a+\frac{nc}{\sigma_2^2}\cdot ac=\frac{m}{\sigma_1^2}a+\frac{nc^2}{\sigma_2^2}a$，a的~~某~~无偏估计为 $T=\frac{T(x)}{\frac{m}{\sigma_1^2}+\frac{nc^2}{\sigma_2^2}}$

故由L-S定理，T为a的UMVUE。

由 扫描全能王 扫描创建

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(2) ∵ $X_i \sim N(a, \sigma_1^2)$ $Y_j \sim N(~~b~~a, \sigma_2^2)$

∴ $T \sim N(a, (\frac{m}{\sigma_1^2} + \frac{nc^2}{\sigma_2^2})^{-1})$

即有 $P(|(T-a)\sqrt{\frac{m}{\sigma_1^2} + \frac{nc^2}{\sigma_2^2}}| \le u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

$P(T - \frac{u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{m}{\sigma_1^2} + \frac{nc^2}{\sigma_2^2}}} \le a \le T + \frac{u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{m}{\sigma_1^2} + \frac{nc^2}{\sigma_2^2}}}) = 1-\alpha.$

a 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $[T - \frac{u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{m}{\sigma_1^2} + \frac{nc^2}{\sigma_2^2}}}, T + \frac{u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{m}{\sigma_1^2} + \frac{nc^2}{\sigma_2^2}}}]$

8、(1) σ^2 未知，置信区间为 $[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})]$

$\bar{X} = 2.8$ $n=15$ $t_{14}(0.025) = 2.1448.$

$S^2 = \sqrt{\frac{1}{15-1}\sum_{i=1}^{15}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

故置信区间为 $[2.6762, 2.9238]$

(2) μ 未知，$\chi_{14}^2(0.025) = 26.119$ $\chi_{14}^2(0.975) = 5.629.$

代入公式 $[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})}]$

故置信区间为 $[0.0268, 0.1244]$.

11、 X：A导线长度． Y：B导线长度．

$S_w^2 = \frac{1}{m+n-2}[(m-1)S_A^2 + (n-1)S_B^2] \approx 6.507 \times 10^{-6}$，$S_w \approx 2.551 \times 10^{-3}.$

$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (a_2 - a_1)}{S_w}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{m+n-2}$，故 $P(|\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(a_2-a_1)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}| \le t_{m+n-2}(0.025))$

$m=4, n=5$，$t_7(0.025) = 2.3648.$ $\bar{X} - \bar{Y} = 2.05 \times 10^{-3}.$

所以 CI： $[-1.998 \times 10^{-3}, 6.096 \times 10^{-3}]$

由 扫描全能王 扫描创建

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

14、 $X_i \sim N(a, \delta^2)$　$Y_j \sim N(b, \lambda\delta^2)$

$\bar{Y}-\bar{X}$ 为 $b-a$ 的无偏估计，且 $\bar{Y}-\bar{X} \sim N(b-a, (\frac{\lambda}{n}+\frac{1}{m})\delta^2)$

$$\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(b-a)}{\sqrt{(\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n})\delta^2}} \sim N(0,1)$$

$(m-1)S_X^2/\delta_1^2 \sim \chi^2_{m-1}$，$(n-1)S_Y^2/\lambda\delta_1^2 \sim \chi^2_{n-1}$ (独立) $(m-1)S_X^2/\delta_1^2+(n-1)S_Y^2/\lambda\delta_1^2 \sim \chi^2_{m+n-2}$

由于 X_i, Y_j 独立，故 $(\bar{Y}-\bar{X})-(b-a)$ 与 $\frac{(m-1)S_X^2}{\delta_1^2}+\frac{(n-1)^2S_Y^2}{\lambda\delta_1^2}$ 独立（自行验证）

故记 $S^2=\frac{1}{n+m-2}[\sum_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2+\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n(Y_j-\bar{Y})^2]$

有 $[(\bar{Y}-\bar{X})-(b-a)]/\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}}S \sim t_{m+n-2}$

置信区间：$[\bar{Y}-\bar{X}-S\,t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}},\ \bar{Y}-\bar{X}+S\,t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}}]$

15、 (1) $\delta_1^2 \neq \delta_2^2$ 未知，$b-a$ CI：$[\bar{Y}-\bar{X}-S_*t_r(\frac{\alpha}{2}),\ \bar{Y}-\bar{X}+S_*t_r(\frac{\alpha}{2})]$

$\because m=8,\ n=7$，$\bar{X}=30.97$，$\bar{Y}=21.99$，$S_1=36.7$，$S_2=8.1$

$\therefore S_*=\sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}}=177.73$、

又可得 $\frac{S_*^4}{\frac{S_1^4}{m(m-1)}+\frac{S_2^4}{n(n-1)}} \approx 7.77$，故取 $r=8$

则 $t_8(0.025)=2.3060$，CI：$[-21.76, 39.72]$

(2) a, b 未知，CI：$[\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}]$

$\because S_1^2=1348.89$，$S_2^2=65.61$，$m=8, n=7$

$F_{7,6}(0.05)=4.21$，$F_{7,6}(0.95)=1/F_{6,7}(0.05)=1/3.87$

$\therefore$ CI：$[4.876, 79.446]$

由 扫描全能王 扫描创建

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

23、(1) 记 $Y_i = X_i - \theta$，其分布与 θ 无关.

$g_Y(y) = e^{-y} I_{(y>0)}$，$Y_{(1)}$ 的密度函数为 $n e^{-ny} I_{(y>0)}$

故 $X_{(1)} - \theta \sim n e^{-nx} I_{(x>0)}$ 分布与 θ 无关.

(2) $P(0 < X_{(1)} - \theta < -\frac{1}{n}\ln\alpha) = \int_0^{-\frac{1}{n}\ln\alpha} n e^{-nt} dt = 1-\alpha$

$\therefore \theta$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $[X_{(1)} + \frac{1}{n}\ln\alpha, X_{(1)}]$

26、$X \sim b(m, p_1)$　　$Y \sim b(n, p_2)$，当 m, n 很大时,

有　$E(\bar{Y} - \bar{X}) = p_2 - p_1$，$Var(\bar{Y} - \bar{X}) = \frac{1}{m}p_1(1-p_1) + \frac{1}{n}p_2(1-p_2)$

当 m, n 足够大，由中心极限定理：$\dfrac{Y/n - X/m - (p_2 - p_1)}{\sqrt{Var(\frac{Y}{n} - \frac{X}{m})}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

又 $\because \bar{Y} \xrightarrow{P} p_2$，$\bar{X} \xrightarrow{P} p_1$　$\therefore \frac{1}{m}\bar{X}(1-\bar{X}) + \frac{1}{n}\bar{Y}(1-\bar{Y}) \xrightarrow{P} \frac{1}{m}p_1(1-p_1) + \frac{1}{n}p_2(1-p_2)$

$$\therefore \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (p_2 - p_1)}{\sqrt{\frac{1}{m}\bar{X}(1-\bar{X}) + \frac{1}{n}\bar{Y}(1-\bar{Y})}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

即有：$P\left(\left|\dfrac{\bar{Y} - \bar{X} - (p_2 - p_1)}{\sqrt{\frac{1}{m}\bar{X}(1-\bar{X}) + \frac{1}{n}\bar{Y}(1-\bar{Y})}}\right| \le u_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$,

$p_2 - p_1$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $[\bar{Y} - \bar{X} - (\frac{1}{n}\bar{Y}(1-\bar{Y}) + \frac{1}{m}\bar{X}(1-\bar{X}))^{\frac{1}{2}} u_{\alpha/2}, \bar{Y} - \bar{X} + (\frac{1}{n}\bar{Y}(1-\bar{Y}) + \frac{1}{m}\bar{X}(1-\bar{X}))$

28、λ CI：$[\hat{\lambda} - u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}, \hat{\lambda} + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}]$

$\hat{\lambda} = \bar{X} = 2$　　$u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$，$n = 40$.

$\therefore$ CI：$[1.562, 2.438]$

由 扫描全能王 扫描创建