

由题:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4 | |x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|)$$

$$= \frac{e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{x_3^2 + x_4^2}{2\sigma_2^2}}}{\frac{2\pi\sigma_1^2}{2\pi\sigma_2^2} P(|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|)} \quad (|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|) \quad \star_3$$

可验证全积分为1.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4 | |x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|) \leftarrow \text{非密度函数}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{x_3^2 + x_4^2}{2\sigma_2^2}}}{2\pi\sigma_1^2 \cdot 2\pi\sigma_2^2} I_{(|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|)} (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

↑
示性函数让 X 取值空间变成 $\mathbb{R}^4$

现在 $|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|$ 下

$$(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|$$

与 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid |x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|$ 等价

$$\Rightarrow f(x_1, \dots, x_n | |x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|)$$

$$= \frac{e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{x_3^2 + x_4^2}{2\sigma_2^2}}}{(2\pi\sigma_1^2)^{\frac{n-2}{2}} (2\pi\sigma_2^2)^2 \cdot \frac{2\pi\sigma_1^2}{2\pi\sigma_2^2} P(|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|)} I_{(|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|)} (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

同理推 $f(x_1, \dots, x_n | |x_1 - x_2| > |x_3 - x_4|) = \frac{e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{x_3^2 + x_4^2}{2\sigma_2^2}}}{(2\pi\sigma_1^2)^{\frac{n-2}{2}} (2\pi\sigma_2^2)^2 \cdot \frac{2\pi\sigma_1^2}{2\pi\sigma_2^2} P(|x_1 - x_2| > |x_3 - x_4|)} I_{(|x_1 - x_2| > |x_3 - x_4|)} (x_1, \dots, x_n)$

现在 $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n | |x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|) P(|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|)$

$$+ f(x_1, \dots, x_n | |x_1 - x_2| > |x_3 - x_4|) P(|x_1 - x_2| > |x_3 - x_4|)$$

$$= \frac{e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{x_3^2 + x_4^2}{2\sigma_2^2}}}{(2\pi\sigma_1^2)^{\frac{n-2}{2}} (2\pi\sigma_2^2)^2} I$$

$$= \frac{e^{-\frac{X_1^2 + X_2^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{X_3^2 + X_4^2}{2\sigma_2^2}}}{(2\pi\sigma_1^2)^{\frac{n-1}{2}} (2\pi\sigma_2^2)^{\frac{n-1}{2}}} I_{(|X_1 - X_2| \leq |X_3 - X_4|)} + \frac{e^{-\frac{X_1^2 + X_2^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{X_3^2 + X_4^2}{2\sigma_2^2}}}{(2\pi\sigma_1^2)^{\frac{n-1}{2}} (2\pi\sigma_2^2)^{\frac{n-1}{2}}} \cdot I_{(|X_1 - X_2| > |X_3 - X_4|)} \quad (\vec{X} \in \mathbb{R}^n)$$

注: $\star$ 的独立成立只在 $|X_1 - X_2| \leq |X_3 - X_4|$ 成立
或 $|X_1 - X_2| > |X_3 - X_4|$ 成立

可由 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的结果验证 $(X_1, \dots, X_4)$ 与 $(X_5, \dots, X_n)$ 不独立.

②: 很多人 $\star$ 计算写错! 原因在于忽略了 $(x_1, \dots, x_4)$ 的取值范围, 从而全积分为不为 1, $\Rightarrow$ 非条件密度.

所得的密度函数
条件

故: 在 $\star$ 密度函数后写上取值范围是优秀的习惯, 或者把取值范围写成示性函数(推荐).

③ $\star$ 的推导可由分布函数求导可得.