随机过程　历年考试真题
2023 版

说明

部分试题或答案有误 (且答案错误率不算低), 若发现排印错误或投稿欢迎联系:
lzw2003@mail.ustc.edu.cn
最后修改于 2023 年 7 月 11 日. 可在主页下载最新版
http://home.ustc.edu.cn/~cc22155/resource/SPexam.pdf
如有意制作往年题，请参考此简易教程

没有 title 的 21 级普通学生[1]
2023 年 2 月于合肥

更新日志

- **2023.02.27**　2023 版初始版本
- **2023.02.28**　将 2022.6 随机 B 期末试卷重制为 PDF 版
- **2023.03.02**　修正 2020.1 随机 B 期末试卷的超链接跳转, 修改了一下排版, 添加页脚显示总页数. 尝试添加页脚跳转到目录页但水平有限失败 (悲)
- **2023.03.04**　新增 2016.6 随机 B 期末答案，2017.6 随机 B 期末试卷，2019.6 随机 B 期末及答案
- **2023.07.01**　修改 2023.2 随机 B 期末试卷第四题的矩阵笔误

注：

- 2015-2016 学年第二学期随机过程 B 期末（第二套试卷）的五 (2) 是错题

---

[1] 欢迎访问主页：http://home.ustc.edu.cn/~cc22155
我终于也能装模作样地在序里写点奇怪的东西了吗 233

目录

中国科学技术大学

2012—2013 学年第一学期考试试卷

考试科目：随机过程　　　　　　　得　分：____________

学生所在系：___________姓　名_____________学　号：___________

（2013 年 1 月 22 日，开卷）

一、**（20 分）**设有随机过程

$$X(t)=\xi\cos t+\eta\sin t,\ (0<t<\pi)$$

其中ξ与η独立, 且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，试求：

（1）$\{X(t),\ 0<t<\pi\}$的均值函数$\mu_X(t)$与协方差函数$r_X(s,t)$；

（2）$\{X(t),\ 0<t<\pi\}$的一维与二维分布密度。

二、**（20 分）**公路某收费站红、黄、蓝三种颜色的汽车到达数分别为速率$3,4,5$的泊松过程，且相互独立，试求：

（1）第一辆车（红、黄或蓝色）的平均到达时间及第一辆红车的平均到达时间；

（2）红车首先到达的概率；

（3）在相继的两辆红车之间恰有k辆车到达的概率（$k=0,1,2,\cdots\cdots$）。

三、**（20 分）**有关某种商品的销售状况共有 24 个季度的连续数据（1—畅销，0—滞销）：

1，1，0，1，0，0，1，1，1，0，1，0，

1，1，0，0，1，1，0，1，0，1，1，1，

假设该商品销售状况满足齐次马氏链，

（1）试确定该马氏链的一步转移概率矩阵P（用转移频率来近似转移概率）；

（2）若现在是畅销，试确定其后第四季度的销售状况；

（3）若影响销售的所有因素不变，试分析长期以后销售状况的分布。

四、（18 分）设$\{X_n, n\ge 0\}$为区间$[0,\ 3]$上的随机游动，其一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array}\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 0\\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0\\ 0, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}\\ 0, & 0, & 1, & 0\end{pmatrix}$$

试求质点由状态k出发而被状态0吸收的概率p_k及吸收的平均时间v_k $(k=1,2,3)$。

五、（22 分）设$\{X_n, n\ge 0\}$为独立同分布的随机序列，且$E(X_0)=0, Var(X_0)=\sigma^2$。又设$\{N(t), t\ge 0\}$为强度$\lambda$的泊松过程，且与$\{X_n, n\ge 0\}$独立。记$Y(t)=X_{N(t)}$，$(t\ge 0)$，

（1）证明$\{Y(t), t\ge 0\}$为平稳过程；

（2）试求$\{Y(t), t\ge 0\}$的功率谱密度函数。

（3）$\{Y(t), t\ge 0\}$的均值遍历性是否成立？为什么？

（完）

中国科学技术大学

2015-2016学年第二学期期末考试试卷 (A卷)

考试科目 ___随机过程(B)___ 得分 ____________

学生所在系 ____________ 学号 ____________ 姓名 ____________

(考试时间: 2016年6月24日, 可用计算器)

一、 (25分) 判断选择题.

(1) 设$\{N(t), t \geq 0\}$是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程,

a. $\{N(t), t \geq 0\}$一定是平稳过程; ( )

b. 给定$N(t) = n > 0$, 则第n个事件的到达时间服从区间$[0, t]$上的均匀分布; ( )

c. $\{M(t), t \geq 0\}$是另一个强度为$\gamma > 0$的Poisson过程,则$\{N(t) + M(t), t \geq 0\}$是一个强度为$\lambda + \gamma$的Poisson 过程; ( )

(2) 假设一个马氏链的所有状态都是常返的,i和j是两个状态且$i \to j$,则

a. $j \to i$; ( )

b. $P_{ij} > 0$ 或$P_{ji} > 0$; ( )

c. $\sum_{i=1}^{\infty} P_{jj}^{(i)} < \infty$; ( )

(3) 下列关于τ的函数$R(\tau)$是否可能作为平稳过程或序列的协方差函数

a. $R(\tau) = e^{-|\tau|}(\tau^2 + 2|\tau| - 1)$; ( )

b. $R(\tau) = \begin{cases} 1/|\tau|, & \tau \neq 0 \\ 1, & \tau = 0 \end{cases}$; ( )

c. $R(\tau) = |\tau| e^{-\tau^2/2}$; ( )

(4) 设 $\{X_n, n \in N\}$ 是一个马氏链，状态空间为 $\mathcal{S}$. 下面说法是否正确.

a. $P_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^n$, 其中 $i, j \in \mathcal{S}, n \in N$; ( )

b. 如果状态 i, j 是互达的, 则存在 n 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$, $P_{ji}^{(n)} > 0$; ( )

c. 如果转移矩阵的所有行相同，则所有状态是属于相同的类; ( )

d. 如果 $f_{ij} < 1$, $f_{ji} < 1$, 则 i, j 不是互达的; ( )

(5) 设有四个位置 1, 2, 3, 4 在圆周上逆时针排列，一粒子在这四个位置上随机游动，粒子从任何一个位置，以概率 2/3 逆时针游动到相邻位置，以概率 1/3 顺时针游动到相邻位置，以 $X(n) = j$ 表示时刻 n 处在位置 j $(j = 1, 2, 3, 4)$. 则 $P(X(n+3) = 3,\ X(n+1) = 1 | X(n) = 2) =$ ________.

(6) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, 则概率 $P(X_i = \min\{X_1, \ldots, X_n\}) =$ ________.

二、 (15分) 经过高速公路收费站的某物流公司的运货车辆数$N(t)(t \geq 0)$为一强度为100的泊松过程。设该公司的运货车分为大、中、小三个类型，三类车的数量比例为2:3:5，又设经过收费站的每辆车属于哪一类是相互独立的。现分别以$N_1(t)$、$N_2(t)$和$N_3(t)$代表到t时刻为止经过收费站的大、中、小三类车的数目，

(1) 问$N_1(t)$、$N_2(t)$和$N_3(t)$分别是什么过程？

(2) 试证明对固定的$t > 0$，$N_1(t)$、$N_2(t)$和$N_3(t)$相互独立；

(3) 若经过收费站时，大、中、小三类车每辆需缴费80元，50元和30元，试求到时刻t为止该公司运货车所缴纳的总费用$X(t)$的期望和方差。

三、 (15分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个马氏链,其一步转移概率如下图所示.

(1) 写出该链的等价类,且讨论所有状态的周期,常返性和正常返性;

(2) 对所有的$n > 0$,计算状态1经n步首达状态3的概率$f_{13}^{(n)}$;

(3) 计算从 状态 6 出发首次到达状态 5 需要的平均步数。

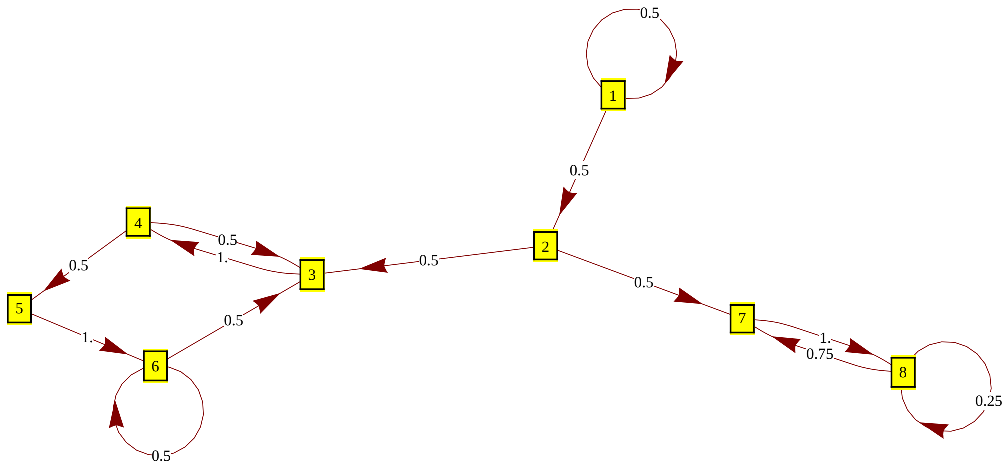


Figure 1: 第三题

四、 (15分) 对于某河流每年汛期流量的观测值可用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来表示，其中状态 -1表示“干旱”，“0”表示正常，“1”表示洪涝。试根据下列25年连续观察数据：

$$-1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 1, 1, 1$$

(1) 确定该马氏链的一步转移概率矩阵 P (用转移频率估计转移概率)；

(2) 证明该马氏链是不可约遍历的；

(3) 试分别求出洪涝与干旱发生的平均间隔（年）.

五、 (15分) 考虑一个随机过程

$$X(t) = U\cos(\omega t) + V\sin(\omega t), \quad -\infty < t < \infty,$$

其中 ω 是常数，U 和V 是随机变量.

(1) 证明 如果$X(t)$ 是宽平稳过程，那么 $E[U] = E[V] = 0$;

(2) 证明 $X(t)$ 是宽平稳过程当且仅当

$$E[UV] = 0,\ \ E[U^2] = E[V^2] < \infty.$$

六、 (15分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2+5}{\omega^4+9\omega^2+14},\ -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？

(完)

随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2016 年 6 月 24 日考试）

一、（20 分）判断是非与填空：

（1）：非，是，非；(3 分)

（2）：是，是，非；(3 分)

（3）：非，是，非；(3 分)

（4）是，非，非，非；(4 分)

（5）：$p_{2,1}p_{1,3}^{(2)}=5/27$；(4 分)

（6）：$\lambda_i/(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$。(3 分)

二、（16 分）：

（1）(5 分) $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ 分别是强度为 $\lambda p_3, \lambda p_2, \lambda p_3$ 的泊松过程，其中：

$$\lambda=100,\ p_1=0.2,\ p_2=0.3,\ p_3=0.5,$$

即强度分别为：$20, 30, 50$。

（2）(6 分) $P\{N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, N_3(t)=n_3\}=$

$$=P\{N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, N_3(t)=n_3 \mid N(t)=n\}P\{N(t)=n\} \quad （其中 n=n_1+n_2+n_3）$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=\frac{(\lambda p_1 t)^{n_1}}{n_1!}e^{-\lambda p_1 t}\frac{(\lambda p_2 t)^{n_2}}{n_2!}e^{-\lambda p_2 t}\frac{(\lambda p_3 t)^{n_3}}{n_3!}$$

$$=P\{N_1(t)=n_1\}P\{N_2(t)=n_2\}P\{N_3(t)=n_3\}。$$

（3）(5 分) $X(t)=80N_1(t)+50N_2(t)+30N_3(t)$，

$$EX(t)=4600t，\quad Var(X(t))=248000t。$$

三、（16 分）：

（1）(5 分){1}与{2}均为瞬过类，前者为非周期，后者周期为无穷；{3,4,5,6}与{7,8}均为遍历类；

（2）(6 分) $f_{1,3}^{(1)}=0,\ \ f_{1,3}^{(n)}=(0.5)^n$，$(n\ge 2)$；

（3）(5 分) 该马氏链的转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

设$T=\min\{n:\ n\ge 0, X_n=5\}$，记$v_i=E(T\mid X_0=i)$，$(i=1,2,\cdots,8)$ 则有：

$$v_6=E(T\mid X_0=6)=\sum_i E(T\mid X_1=i)p_{6,i}=0.5E(T\mid X_1=3)+0.5E(T\mid X_1=6)$$

$=0.5(v_3+1)+0.5(v_6+1)$，即有：$v_6=0.5(v_3+1)+0.5(v_6+1)$；同理可得：

$v_3=v_4+1$，$v_4=0.5(v_3+1)+0.5$。解得：$v_6=6$。

四、（16 分）：

（1） (5 分)
$$P=\begin{array}{c} -1\\0\\1 \end{array}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

（2）(6 分) 由状态转移图分析可证；

（3）(5 分) 求解线性方程组：

$$\pi_{-1}=\tfrac{4}{9}\pi_{-1}+\tfrac{4}{9}\pi_0,\ \ \pi_0=\tfrac{4}{9}\pi_{-1}+\tfrac{3}{9}\pi_0+\tfrac{1}{3}\pi_1,\ \ \pi_1=\tfrac{1}{9}\pi_{-1}+\tfrac{2}{9}\pi_0+\tfrac{2}{3}\pi_1,\ \ \sum_i \pi_i=1$$

得马氏链极限分布：$\pi=(\frac{12}{41},\frac{15}{41},\frac{14}{41})$，所求者为：

$$\mu_1=\tfrac{41}{14}\simeq 2.93,\ \ \mu_{-1}=\tfrac{41}{12}\simeq 3.42。$$

五、(16 分):

(1) (8 分) 否则，设 $E[U] \triangleq u$， $E[V] \triangleq v$ 不全为零，则 $u^2+v^2>0$，从而有：

$\dfrac{EX(t)}{\sqrt{u^2+v^2}} = \sin(\omega t+\alpha)\ (t \in \mathrm{R})$ 不为常数，(其中 α 满足：$\sin\alpha = u\big/\sqrt{u^2+v^2}$，

$\cos\alpha = v\big/\sqrt{u^2+v^2}$ ）矛盾。

(2) (8 分) 充分性易证，此时 $EX(t)=0,\ (\forall t \in \mathrm{R})$ 又若记 $E[U^2]=E[V^2] \triangleq \sigma^2$，则：

$\gamma_X(t+\tau,t) = EX(t+\tau)X(t) = \sigma^2\cos(\omega\tau) = R_X(\tau)$。

必要性：取 $t_0 \in \mathrm{R}$ 使得：$\sin(\omega t_0)=0$，则因为 $X(t)$ 的二阶矩有限，故有：

$EX^2(t_0) = \cos^2(\omega t_0)E[U^2] < \infty$，这说明 $E[U^2]<\infty$，同理可证：$E[V^2]<\infty$。

又因 $X(t)$ 为宽平稳，故其方差：$Var(X(t)) =$

$= E[U^2]\cos^2(\omega t) + E[UV]\sin(2\omega t) + E[V^2]\sin^2(\omega t)$ 为常数，对它求导,应有：

$$\omega[E(V^2)-E(U^2)]\sin(2\omega t) + 2\omega E(UV)\cos(2\omega t) = 0,\ (\forall t \in \mathrm{R})$$

显然，与（1）类似，此时必有：$E(UV)=0$，且 $E(U^2)=E(V^2)$。

六、(16 分):

(1) (8 分) $R(\tau) = \dfrac{3\sqrt{2}}{20}e^{-\sqrt{2}|\tau|} + \dfrac{\sqrt{7}}{35}e^{-\sqrt{7}|\tau|}$；

(2) (8 分) 由于 $\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau < \infty$，故 $X(t)$ 的均值具有遍历性。

《随机过程A》期中考试试题

姓 名__________ 学 号__________ 得 分__________

(2017年05月08日上午9:45–11:45)

一. (30分) 填空或选择题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 设随机变量X和Y的矩母函数$g_X(t)$和$g_Y(t)$均存在, 则下列说法错误的是( ).
   (A) $g_X(t)$能唯一决定X的分布
   (B) 若X的方差存在且$g_X(t)$二阶可导, 则 $\mathrm{Var}(X) = g''_X(0) - [g'_X(0)]^2$
   (C) $X+Y$的矩母函数也存在且为$g_X(t)g_Y(t)$
   (D) 对任意$n > 0$, n 阶矩 $\mathrm{E}[X_n]$ 一定存在
2. 设$\{N(t), t \geq 0\}$是一个强度为 λ 的Poisson过程, 则 $\mathrm{E}[N(1)N(2)] =$ ________;
   若又已知$N(3) = 1$, 则 $\mathrm{P}(N(2) - N(1) = 1) =$ ________.
3. 关于一般的更新过程, 下列说法中通常正确的是( ).
   (A) 具有平稳独立增量性
   (B) 具有独立增量性, 但不具有平稳增量性
   (C) 不具有独立增量性, 但具有平稳增量性
   (D) 既不具有独立增量性又不具有平稳增量性
4. 设$\{X_n, n \geq 0\}$是一个 Markov 链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

   若 X_0 的分布律为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则$X_2$的分布律为______________;
   且该 Markov 链的平稳分布为____________.
5. 在离散时间 Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是( ).
   (A) 若状态 i 常返且 $j \to i$, 则状态 j 也是常返的
   (B) 若状态 i 常返且 $i \to j$, 则状态 j 不一定是常返的
   (C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$一定存在
   (D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$一定存在
6. 关于离散时间 Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是( ).
   (A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布
   (B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等
   (C) 极限分布若存在则与 X_0 的取值无关
   (D) 平稳分布若存在则必唯一

7. 关于直线上的简单对称随机游动$\{X_n, n \geq 0\}$, 下列说法错误的是(　).
   (A) 所有状态的周期均为 2
   (B) $\{X_n, n \geq 0\}$为一个 Markov 链且无平稳分布
   (C) 若 $X_0 = 0$, 则对任意整数 n, 其最终能到达它的概率为 1
   (D) 若 $X_0 = 0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的
8. 在初始状态为 1 的分支过程中, 若每个个体繁衍下一代个体的数目服从参数为 $\lambda > 1$ 的 Poisson 分布, 则群体最终会灭绝的概率为方程__________的最小正根.
9. 若一连续时间 Markov 链在某个时刻所处的状态为 i, 且已知

$$q_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad q_{i,i+1} = \frac{1}{3}, \quad q_{i,i+2} = \frac{1}{6}, \quad q_{i,j} = 0, \quad j \notin \{i-1, i, i+1, i+2\},$$

   则其状态继续停留在 i 上的时间服从参数为________的指数分布, 然后转移到 $i-1$ 上的概率为________.

二. (12分) 设$\{X_n, n \geq 0\}$是满足第一题8小题条件的分支过程. 对任意 $n \geq 0$, 试求 X_n 的期望 $\mathrm{E}[X_n]$ 与方差 $\mathrm{Var}[X_n]$.

三. (18分) 设某路口轿车和客车分别按速率为 λ_1 和 λ_2 的Poisson过程通过, 且相互独立. 从某个时刻 t 开始, 试求

1. 有第一辆车通过该路口所需的平均时间.
2. 轿车首先通过该路口的概率.
3. 在相继两辆轿车之间恰有 n 辆客车通过该路口的概率, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

四. (20分) 设罐子中装有 4 个球, 它们要么是红色的, 要么是黑色的. 每次从罐中随机取出一个球, 然后换入一个另一种颜色的球. 经过 n 次这样的取球置换后, 记 X_n 为罐中黑球的个数.

1. 写出过程$\{X_n, n \geq 0\}$状态空间, 并说明该过程是否为 Markov 链.
2. 讨论各状态的周期性和常返性(可直接写出你的结论, 无须计算过程).
3. 当 $n \to \infty$ 时, 试讨论 X_n 的极限分布.
4. 若初始时罐中没有黑球, 则平均需要多少次取球置换后罐中再次无黑球?

五. (20分) 两颗通信卫星放入轨道, 每颗卫星的工作寿命均服从参数为 μ 的指数分布. 一旦有某颗卫星失效就再发射一颗新卫星替换它, 所需的准备及发射时间服从参数为 λ 的指数分布. 记 $X(t)$ 为时刻 t 时在轨道中工作的卫星个数, 则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一连续时间 Markov 链.

1. 问 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是否为一个生灭过程? 说明你的理由并指出状态空间.
2. 写出该 Markov 链的 Q 矩阵.
3. 建立其 Kolmogorov 向前微分方程(要求: 非矩阵形式).
4. 当时间 $t \to \infty$ 时, 在轨工作卫星数服从什么分布?

中 国 科 学 技 术 大 学

2016—2017学年第二学期考试试卷

考试科目 随机过程(A) 得分 ____________

所在系 ________ 学号 ____________ 姓名 ____________

(2017年6月12日上午14:30–16:30, 半开卷)

装……………订……………线

一. (30分) 填空或选择题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 1 的Poisson过程, 则

$$P(N(10) = 9|N(5) = 4) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_; \quad E[N(10)|N(5)] = \_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个更新过程, 且 W_k 为其第 k 个更新点($k \geq 1$), 下列中一定正确的是( ).
   (A) 事件$\{N(t) < k\}$ 与 $\{W_k > t\}$ 等价 (B) 事件$\{N(t) \leq k\}$ 与 $\{W_k \geq t\}$ 等价
   (C) 事件$\{N(t) > k\}$ 与 $\{W_k < t\}$ 等价 (D) 事件$\{N(t) \geq k\}$ 与 $\{W_k < t\}$ 等价
3. 关于离散时间Markov链, 下列说法正确的是( ).
   (A) 如果某个状态是常返的, 则过程至少会到达它一次
   (B) 所有状态不可能都是非常返的
   (C) 若有无穷个状态且不可约, 则所有状态不可能都是正常返的
   (D) 若两个状态不互达, 则它们有可能都是常返的
4. 设在一连续时间Markov链中, 对某个给定的时刻 $t_0 > 0$, 有 $X(t_0) = i$, 且已知过程离开状态 i 的速率为 ν_i, 则下列说法中错误的是( ).
   (A) 继续在 i 上停留的时间服从参数为 ν_i 的指数分布 $\text{Exp}(\nu_i)$
   (B) 若已知下一步会转移到状态 j, 则继续在 i 上停留的时间服从 $\text{Exp}(\nu_i)$ 分布
   (C) 在 t_0 前后两次状态转移的时间间隔服从 $\text{Exp}(\nu_i)$ 分布
   (D) 若 ν_i 越大, 则继续在 i 上停留的平均时间越短
5. 设在一状态空间为 $\{0, 1, 2\}$ 的生灭过程中, 每个状态上停留的时间均服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 且转移概率

$$P_{01} = P_{21} = 1, \quad P_{10} = P_{12} = \frac{1}{2}.$$

   那么该过程的转移率矩阵 $Q =$ ____________, 极限分布 $\pi =$ ____________.
6. 下列过程中一般不具有Markov性的是( ).
   (A) Poisson过程 (B) 更新过程 (C) Yule过程 (D) Brown运动
7. 下列过程中不是Guass过程的是( ).
   (A) 标准Brown运动 (B) 几何Brown运动
   (C) Brown桥过程 (D) 带漂移的Brown运动
8. 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准Brown运动, 且 $B(0) = 0$. 对任意 $0 < s < t < \infty$, 随机向量 $(B(s), B(t))$ 服从二元正态分布 $N($____________$)$; $P(B(t) > 1|B(s) = 1) =$ ______.

9. 设 $\{B_{00}(t), 0 \le t \le 1\}$ 为Brwon桥过程, 则对任意 $0 \le s \le 1, \mathrm{Var}[B_{00}(s)] =$ ______.

二. (12分) 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 试求:

1. 在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率.
2. 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布函数.

三. (18分) 独立重复地掷一枚均匀的骰子, 以 X_n 表示前 n 次结果中的最大点数, 则 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为一个Markov链.

1. 写出该Markov链的状态空间和一步转移概率矩阵.
2. 求概率 $\mathrm{P}(X_{n+2} = 4 | X_n = 3)$ 及 $\mathrm{P}(X_2 = X_3 = X_4 = 3)$.
3. 问当 $n \to \infty$时, X_n 的极限分布是否存在? 请写出并证明你的结论.

四. (16分) 考虑直线上从原点出发的简单对称随机游动, 记 X_n 表示时刻 n 过程所处的位置, 且

$$Y_n = X_n^2 - n, \quad Z_n = (-1)^n \cos(\pi X_n).$$

证明 $\{Y_n, n \ge 0\}$ 和 $\{Z_n, n \ge 0\}$ 均为关于 $\{X_n, n \ge 0\}$的鞅.

五. (8分) 设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 为一个鞅, 对任意 $n \ge 0$, 二阶矩 $\mathrm{E}[X_n^2]$ 存在且记 $Y_n = X_n^2$, 问 $\{Y_n, n \ge 0\}$ 是否为一个(上, 下)鞅? 证明你的结论.

六. (16分) 设 $\{B(t), t \ge 0\}$ 为标准Brown运动, 且 $B(0) = 0$.

1. 求 $B(1) + B(2) + B(3)$ 的分布.
2. 在 $B(2) = 1$ 的条件下, 分别求 $B(1)$ 和 $B(3)$ 的分布.

中国科学技术大学

2016-2017学年第一学期期末考试试卷 (A卷)

考试科目 ___随机过程(B)___ 得分 ________________

学生所在系 ________________ 学号 ____________ 姓名 __________

(考试时间: 2017年1月11日上午8 : 30-10 : 30, 半开卷)

装 订 线

一、 (32分) 判断是非与填空题.

(1) 设$\{N(t), t \geq 0\}$是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程, 则 $\mathrm{Cov}(N(t), N(s))=$ ________.

(2) （判断是非）设有 $m \geq 1$ 使得对于马氏链的所有状态 i，有 $P_{i,j}^{(m)} > 0$，则：

A $d(j)|m$, 其中 $d(j)$ 为 j 的周期; ( )

B $d(j) = m$; ( )

C j 是非周期的; ( )

D j 的周期为无穷; ( )

(3) 设某路口白、红、灰三种颜色的汽车的到达数量分别为强度为λ_1, λ_2, λ_3 的Piosson过程到达，且相互独立。若不论颜色，第一辆汽车平均到达时间为________；第一辆红色汽车的平均到达时间为________。

(4) 设$[0, t]$内到达某商店门口的顾客数$\{N(t), t \geq 0\}$是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程, 每个达到的顾客依概率p 进入店内，以概率$1-p$ 不进店即离开，且顾客是否进店是相互独立的；进店的每个顾客又独立地以概率q 进行消费，以概率$1-q$不消费。则进店的顾客数的均值和方差为________和________；消费的顾客数的均值和方差为________和________。

(5) 设$X(t) = A\sin(2\pi\Theta_1 t + \Theta_2)$, A 为常数，$\Theta_1$, Θ_2 为相互独立的随机变量，Θ_1的密度函数为一个偶函数，而Θ_2 服从区间$[-\pi, \pi]$上的均匀分布，则其均值函数为________，协方差函数为________，从而该过程为________。

(6) 设马氏链的状态 i 是周期为 d 的常返状态，μ_i 为状态 i 的平均常返时，则$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} =$ ________。

二、 (16分) 设某人甲负责订阅杂志，前来订阅的顾客数是日均到达率为6 的泊松过程$\{N(t), t \geq 0\}$。若每个顾客的订阅季数$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.且各人的选择相互独立。设 $N_i(t)$ 为订阅 i 季杂志的顾客人数，$i = 1, 2, 3$. 并以 $\{X(t)\}$ 表示到时刻 t 为止甲所得全部手续费（假设每订出一季杂志，甲可得手续费 1 元），

(1) 问 $N_i(t)$，$i = 1, 2, 3$ 分别是什么过程？它们是否相互独立？

(2) 试求：$E[X(t)]$，$Var(X(t))$, 及$X(t)$ 的矩母函数$g_{X(t)}(u) = E[e^{uX(t)}]$.

三、 (20分) 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时（$n=0$）均为1/3(其他品牌总的市场占有率为1/3). 而每过一个月（单位时间）顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 来描述,其一步转移概率(状态1、2、3分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器)如下图所示.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明该链为不可约、遍历的;

(2) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少？

(3) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例？

四、 (16分) 逐个随机地把球放入到 a个盒子中去（可重复放），以 X_n 表示放了 n个球之后的空盒数，则 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为马氏链，

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵P，并进行状态分类;

(2) 试求放满 a个盒子的平均时间（次数）。

五、 (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2+5}{\omega^4+11\omega^2+24},\ -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？

(完)

中 国 科 学 技 术 大 学

2016—2017学年第二学期考试试卷

考试科目 ______随机过程(B)______ 得分 ____________

所在系 _______ 学号 ____________ 姓名 ____________

(2017年6月22日上午8:30–10:30, 半开卷)

一. (29分) 填空或选择题.

1. 设随机变量X和Y的矩母函数$g_X(t)$和$g_Y(t)$均存在, 则下列说法错误的是( ).
   (A) $g_X(t)$能唯一决定X的分布
   (B) 若X的方差存在且$g_X(t)$二阶可导, 则$\mathrm{Var}(X) = g''_X(0) - [g'_X(0)]^2$
   (C) $X + Y$的矩母函数也存在且为$g_X(t)g_Y(t)$
   (D) 对任意$n > 0$, n 阶矩$\mathrm{E}[X^n]$ 一定存在
2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的Poisson过程, 则 $\mathrm{E}[N(1)N(2)] =$ __________; $\mathrm{E}[N(10)|N(5)] =$ ________; 若又已知$N(3) = 1$, 则 $\mathrm{P}(N(2) - N(1) = 1) =$ _______.
3. 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 则在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率是 _______. 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是 _______.
4. 设$\{X_n, n \geq 0\}$是一个Markov 链, 且一步转移概率矩阵为
$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$
   若X_0 的分布律为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则$X_2$的分布律为______________; 且该Markov 链的平稳分布为____________.
5. 在离散时间Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是( ).
   (A) 若状态 i 常返且 $j \to i$, 则状态 j 也是常返的
   (B) 若状态 i 常返且 $i \to j$, 则状态 j 不一定是常返的
   (C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$一定存在
   (D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$一定存在
6. 关于离散时间Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是( ).
   (A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布
   (B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等
   (C) 极限分布若存在则与X_0 的取值无关
   (D) 平稳分布若存在则必唯一
7. 关于直线上的简单对称随机游动$\{X_n, n \geq 0\}$, 下列说法错误的是( ).
   (A) 所有状态的周期均为2

(B) $\{X_n, n \geq 0\}$为一个Markov 链且无平稳分布

(C) 若$X_0 = 0$, 则对任意整数n, 其最终能到达它的概率为1

(D) 若$X_0 = 0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的

8. 关于平稳过程, 下列说法正确的是( ).

(A) 宽平稳过程具有平稳增量性

(B) Possion过程是宽平稳过程

(C) 初始状态服从平稳分布的Markov过程为严平稳过程

(D) 严平稳过程一定是宽平稳过程

二. (12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目 $N(t)$ 服从参数为 λ 的 Poisson 过程，每个电子携带能量相互独立且与电子数目 $N(t)$相互独立，并均服从区间 $[1,2]$ 上的均匀分布，设到 t 时刻的阳极接受的能量为 $S(t)$. 求$S(t)$ 的均值 $\mathrm{E}[S(t)]$ 和 方差$\mathrm{Var}[S(t)]$.

三. (20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车，分别按强度为 λ_1, λ_2 和λ_3 且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站，

(1) 若不论颜色，求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望；

(2) 在已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下,

(a) 下一辆仍是红车的概率是多少？ (b) 下一辆是黄车的概率是多少？

(3) 已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下，接下来通过的 k 辆全是红车，而后是非红车的概率是多少？（$k \geq 0$）

(4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有n 辆的概率, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

四. (15分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $S = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$（全体非负整数），转移概率为

$$P_{i,i+1} = P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 0.$$

(1) 证明该马氏链为不可约遍历的；

(2) 试求该马氏链的极限分布 $\pi = \{\pi_i,\ i \geq 0\}$。

五. (8分) 设$X(t) = Y\cos(\omega t + \Theta)$, 其中 ω 为常数，Y 服从均值为μ, 方差为 σ^2 正态分布，Θ 服从区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布，且 Y 与Θ 相互独立. 试判断$X(t)$ 是否为宽平稳过程。如是，请给出证明；否则，请说明原因。

六. (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 21}, \ -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？

中国科学技术大学期末考试题

考试科目：随机过程（B） 得分：______

学生所在系：______________ 姓名：__________ 学号：___________

（2018 年 1 月 9 日，半开卷）

一、(20 分) 判断是非与填空：

（1）（每空 2 分）设 $X=\{X_n,\ \ge 0\}$ 为一不可约、有限（N 个）状态的马氏链，且其转移概率矩阵 P 为双随机的（行和与列和均为 1），则：

$a.$ X 的平稳分布不一定存在（ ）； $b.$ X 的平稳分布存在但不必唯一（ ）；

$c.$ X 的平稳分布为 $(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\ldots,\frac{1}{N})$（ ）； $d.$ X 的极限分布为：$(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\ldots,\frac{1}{N})$（ ）。

（2）（每空 3 分）设公路上某观察站红、黄、蓝三种颜色的汽车到达数分别是强度为 2、3 和 5（辆/分钟）的泊松过程。则：

$a.$ 第一辆车到达的平均时间为( )； $b.$ 红车首先到达的概率为( )；

$c.$ 在第一辆红车到达之前恰好到达 k 辆非红车的概率为（ ）。

（3）（3 分）有关某种商品的销售状况共有 24 个季度的连续数据（1—畅销，0—滞销）：

$$1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,$$
$$1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,$$

若该商品销售状况满足齐次马氏链，则据以上数据可估计出该马氏链的转移概率矩阵 P 为（ ）。

二、（15 分）设到达某计数器的脉冲数 $\{N(t), t\ge 0\}$ 是一速率为 λ 的泊松过程，每个脉冲被记录的概率均为 p，且各脉冲是否被记录是相互独立的。现以 $N_1(t)$ 表示被记录的脉冲数，试求 $N_1(t)$ 的矩母函数 $g_{N_1(t)}(v)$ 以及 $EN_1(t)$，$Var[N_1(t)]$ 和 $Cov(N_1(s),N_1(t))$。

三、（20 分）设马氏链 $\{X_n, n\ge 0\}$ 的转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

（1）设 $X_0=3$，试求：$\pi_i(1)=P\{X_1=i\},\ \pi_i(2)=P\{X_2=i\},\ (i=1,2,3)$，并求：$E(X_1)$ 和 $E(X_2)$；

（2）试求该马氏链的极限分布：$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$，$(i, j = 1, 2, 3)$；

（3）当初始分布 $\pi_i(0)\ (i = 1,2,3)$ 为什么分布时，该马氏链为严格平稳过程？并求此时的 $E(X_n)$。

四、（15 分）把一些球逐个随机地放到 a 个格子中去，若 n 个球放进了 k 个格子，则称系统在时刻 n 的状态为 k。试用一马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 描述此系统，并且

（1）写出该马氏链的转移概率矩阵 P，并讨论其状态分类；

（2）证明过程由状态 $k\ (0 \leq k \leq a-1)$ 出发，必然进入状态 a；

（3）试求放满 a 个格子的平均时间（假定 $X_0 = 0$）。

五、（15 分） 设有随机过程 $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$，其中 Θ 服从均匀分布 $U(0, 2\pi)$，A 服从瑞利分布：

$$A \sim f(x) = \tfrac{x}{\sigma^2}\exp(-\tfrac{x^2}{2\sigma^2}), (x > 0)$$

且 A 与 Θ 独立，

（1）证明 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求 $\{X(t),\ t \in R\}$ 的功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、（15 分）在下列四个关于 ω 的函数中：

$$S_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 4)(\omega + 1)^2},\quad S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 64}{\omega^4 + 29\omega^2 + 100},$$

$$S_3(\omega) = \frac{\omega^2 - 4}{\omega^4 + 4\omega^2 + 3},\quad S_4(\omega) = \frac{\omega^2 \cos\omega}{\omega^4 + 1}$$

（1）哪一个可以作为一个平稳过程 $\{X(t),\ t \in \mathrm{R}\}$（均值为 0）的功率谱密度函数？并求其所对应的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）该平稳过程的均值是否具有遍历性？为什么？

（完）

中国科学技术大学

2017-2018 第二学期期末考试题（2）

考试科目：随机过程（B）　　　　　　　　得分：______

学生所在系：______________ 姓名：__________ 学号：__________

（2018 年 6 月 29 日，半开卷）

一、**(24 分。填空题每空 3 分，其余每空 2 分)** 判断是非与填空：

（1）**（判断是非）** 设 S 为一不可约马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的状态空间，则对任意 $i, j\in S$：

(a) i, j 均为正常返状态 （　　）； (b) $\mu_i=\mu_j$，其中 $\mu_i=\sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ （　　）；

(c) i, j 未必为常返状态（　　）； (d) $d(i)=d(j)\in(0, \infty)$ （　　）。

（2）**（判断是非）** 设马氏链共有 n 个状态，且 $i\to j$，则：

(a) 可用至多 n 步由 i 转移到 j （　）； (b) 由 i 转移到 j 至少要用 n 步 （　　）。

（3）**(填空)** 设粒子在数轴上由 0 出发作对称随机游动，则它回到 0 的平均时间为(　　)。

（4）**（填空）** 设 $\{N(t), t\geq 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程，$s, t>0$，则：

$P\{N(s)=k \mid N(s+t)=n\}=($　　　　　$)(0\leq k\leq n)$；$E\{N(s+t) \mid N(s)\}$ 的期望为

(　　　　)，方差为（　　　　）。

二、**(15 分)** 设某路段发生交通事故的次数 $N(t)$ 为一 Poisson 过程，且平均每月发生交通事故 2 次。又设 $t=0$ 表示去年 12 月底，试求：

（1）到今年 3 月底为止未发生交通事故的概率是多少？

（2）若已知到今年 3 月底已发生了 4 次交通事故，问到 6 月底至少发生 7 次交通事故的概率是多少？

（3）若每次事故造成的经济损失 Y （单位：万元）服从参数为 0.1 的指数分布，且各次损失相互独立，试求到 6 月底为止因交通事故而造成的总损失的期望值。

三、**(15 分)** 一只蚂蚁沿着一个等边三角形（顶点记为 a, b, c）的边爬行，假定在时刻 n 它位于某一顶点（例如 a），则在下一时刻（$n+1$）它爬到另外两个顶点（b 和 c）的概率都等于 $1/2$。试用一个马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 描述这个过程（状态：a, b, c），并且

（1）写出该马氏链的转移概率矩阵 P；

（2）试求 $P^{(n)}=P^n$；

（3）试求 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)} = ?$

四、（**18 分**）设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 为区间 $[0,3]$ 上的随机游动，其转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试求质点由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k,（$k = 1,2,3$）。

五、**(16 分)**设 A 与 B 独立，都服从 $[-1,\ 1]$ 上的均匀分布，定义随机过程：

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \qquad（t \in R，\ \omega_0 \text{ 为非零常数}）$$

（1）证明 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、（**12 分**）设平稳过程 $X = \{X(t),\ t \in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 14}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}$$

（1）试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

（完）

中国科学技术大学

2018-2019 第一学期期末考试题

考试科目：随机过程（B）　　　　　　　　　　得分：______

学生所在系：______________　姓名：__________　学号：__________

（2019 年 1 月 10 日，半开卷）

一、(30 分。填空题每空 3 分，其余每空 2 分) 判断是非与填空：

（1）**（是非）**若马氏链 $X=\{X_n,\ n\ge 0\}$ 的初始分布 $\pi=\{\pi_j,\ j\ge 0\}$ 为其平稳分布，则：

(a) $\sum_{i\ge 0}\pi_i p_{i,j}^{(n)}=\pi_j,(j\ge 0,n\in N)$ （　　）；(b) X 为严格平稳过程（　　）

(c) $\pi_j=\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)},(i,j\ge 0)$ （　　）；　　(d) X 必有正常返状态（　　）。

（2）**（是非）**下列关于 τ 的函数 $R(\tau)$ 是否为(实或复)平稳过程的协方差函数？

(a) $R(\tau)=e^{-|\tau|}(|\tau|+1)^2$ （　　）；(b) $R(\tau)=|\tau|e^{-\tau^2/2}$（　　）；$(c)$ $R(\tau)=\frac{\sin\tau}{\pi\tau}$ （　　）

(d) $R(\tau)=\sigma^2 e^{i\lambda\tau}$ （　　）；(e) $R(\tau)=\sigma^2 e^{-i\lambda|\tau|}$ （　　）。（注：$\sigma,\lambda>0, i=\sqrt{-1}$）

（3）**（填空）**设 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 $X_i\sim Exp(\lambda_i), i=1,2,3$（指数分布），则 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,X_3\}$ 的分布为（　　），概率 $P\{X_1=X_{(1)}\}$ 等于（　　）。

（4）**（填空）**设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程，W_k 为其第 k 个事件发生的时间，并设 $1\le k\le n, t>0$，则 $E\{W_k\mid N(t)=n\}=$(　　)，$E(W_k)=$(　　)。

二、(8 分) 假设汽车按强度为 λ 的泊松过程进入一条单向行驶的无限长的公路，进入的第 i 辆车以速度 V_i 行驶。假定诸 V_i（$i\ge 1$）为相互独立的正随机变量，有共同分布 F。试求在时刻 t 位于区间 (a,b) 内的平均汽车辆数。

三、**(15 分)** 设马氏链 $\{X_n,n\ge 0\}$ 的转移概率为：

$$p_{0,j}=a_j>0,\ (j\ge 0)\quad p_{i,i-1}=1,\ (i\ge 1)$$

（1）证明该马氏链为不可约常返的，且为非周期；

（2）试求过程由 0 出发后首次返回到 0 的平均时间 μ_0，并据以回答：过程何时为正常

返？何时为零常返？

（3）在正常返时，试求该马氏链的极限分布：$\pi=\{\pi_j,\ j\geq 0\}$。

四、（**20 分**）设马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（1） 试讨论该马氏链的状态分类（即：分为几个等价类、各类的周期性如何、是否为常返、是否为正常返？）。

（2） 试求过程由状态k出发而被状态j吸收的概率$f_{k,j}$，$(k=1,2;\ j=3,4)$。

五、(15 分)设A与Θ独立且分别服从均匀分布$U(0,1)$与$U(0,2\pi)$，定义过程：

$$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)\qquad（t\in R，\ \omega_0 \text{为非零常数}）$$

（1）证明$\{X(t),\ t\in R\}$为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数$S(\omega)$。

六、（12 分）设平稳过程$X=\{X(t),\ t\in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^4+11\omega^2+28}$$

（1）试求X的协方差函数$R(\tau)$；

（2）问X的均值是否有遍历性？为什么？

（完）

随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2019 年 1 月 10 日）

一、（30 分）

（1）（每空 2 分）：a.（ 是 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d.（ 是 ）。
（2）（每空 2 分）：a.（ 非 ）； b.（ 非 ）； c.（是 ） ；d.（是）； e.（非）。

（3）（每空 3 分）（ $1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ ），（$\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$） 。

（4）（每空 3 分）（$\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}/(k-1)!$），（$\lambda t^2/2$）

二、（6 分）

若第 i 辆汽车于时刻 s(s<t)进入该公路，则 $P\{a<(t-s)V_i<b\}=F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})$，故第 i 辆车于时刻 t 位于区间（$a,b$）的概率 $p=\frac{1}{t}\int_0^t[F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})]ds$，从而时刻 t 位于区间（$a,b$）内的平均汽车辆数为 $\lambda pt=\lambda\int_0^t[F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})]ds$。

三、（16 分）

（1）易证马氏链为不可约（$p_{i,j}\ge a_j>0,\forall i\ne j$）、非周期（$p_{0,0}^{(1)}=a_0>0$），且 $f_{0,0}=\sum_{j=0}^{+\infty}a_j=1$，故常返；

（2）求得：$\mu_0=\sum_{n=1}^{+\infty}nf_{0,0}^{(n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}na_{n-1}$，显然，马氏链为正常返 $\Leftrightarrow\mu_0<+\infty$；

（3）$\pi_j=\frac{1}{\mu_0}\sum_{k\ge j}a_k$，（$j\ge 0$） 。

四、（20 分）

（1）四类：$\{1\},\{2\}$ 均为瞬过类，$d(1)=\infty,d(2)=1$；$\{3\},\{4\}$ 为二遍历类（吸收态）。

（2）设 T 为过程进入吸收态的时间，记 $f_{k,j}=P\{X_T=j\,|\,X_0=k\}$，$(k=1,2;\ j=3,4)$ 则有：

$$
\begin{aligned}
f_{1,3}&=P\{X_T=3\,|\,X_0=1\}=\sum_i P\{X_T=3\,|\,X_1=i\}p_{1,i}=0.5f_{2,3}+0.3\\
f_{1,4}&=\sum_i P\{X_T=4\,|\,X_1=i\}p_{1,i}=0.5f_{2,4}+0.2\\
f_{2,3}&=\sum_i P\{X_T=3\,|\,X_1=i\}p_{2,i}=0.2f_{2,3}+0.4\\
f_{2,4}&=\sum_i P\{X_T=4\,|\,X_1=i\}p_{2,i}=0.2f_{2,4}+0.4
\end{aligned}
$$

解得： $f_{1,3}=11/20$，$f_{1,4}=9/20$，$f_{2,3}=f_{2,4}=1/2$。

五、（16 分）

（1）

$$EX(t) = EAE\cos(\omega_0 t + \Theta) = 0$$

$$\gamma_X(t+\tau,t) = EA^2E\cos[\omega_0(t+\tau)+\Theta]\cos(\omega_0 t+\Theta) =$$

$$= \tfrac{1}{2}EA^2E\{\cos[\omega_0(2t+\tau)+2\Theta] + \cos\omega_0\tau\} = \tfrac{1}{2}EA^2\cos\omega_0\tau$$

$$= 4\cos\omega_0\tau = R_X(\tau)$$

故$\{X(t),\ t\in R\}$为宽平稳。

（2） $R_X(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = 4\pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))$。

六、（12 分）

（1）$S(\omega) \leftrightarrow R(\tau) = \frac{2\sqrt{7}}{21}e^{-\sqrt{7}|\tau|} - \frac{1}{12}e^{-2|\tau|}$。

（2）该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau < \infty$。

（完）

中国科学技术大学 2018—2019学年第二学期考试试卷

考试科目 **随机过程B** 得分 ________

学生所在系 ________ 姓名 ________ 学号 ________

(考试时间: 2019年6月24日下午2:30—4:30, 半开卷)

装 …… 订 …… 线

一、 (30分) 是非判断与填空题

(1)设X与Y相互独立，分别服从指数分布$Exp\{\lambda\}$与$Exp\{\mu\}$，则：

(a) $X+Y \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. ( )　　(b) $\min\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. ( )

(c) $\max\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. ( )　　(d) $P\{X>h\}=1-\lambda h+o(h),\ h\downarrow 0$. ( )

(e) $P\{X \le s+t \mid X>s\}=P\{X\le t\},\ s,t>0$. ( )

(2) 关于平稳过程，下列说法是否正确

(a) 宽平稳过程具有平稳增量性. ( )

(b) Poisson过程是平稳过程. ( )

(c) 二阶矩存在的严平稳一定是宽平稳过程. ( )

(d) 初始状态分布为平稳分布的Markov过程一定是严平稳的. ( )

(3) 设有复合泊松过程$X(t)=\sum\limits_{i=1}^{N(t)} Y_i$，其中$N(t)$是强度为$\lambda$的泊松过程，$Y_i \sim Exp\{\mu\}$. 则:

$EX(t)=$ ________,　$E[X^2(t)]=$ ________,　$g_{X(t)}(s)=E\exp\{sX(t)\}=$ ________.

(4) 现有对于一个三状态的马氏链$\{X_n, n\geqslant 0\}$的25个连续观察数据:

-1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -1,

-1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 1, 1, 1,

则据此可估计出该马氏链的转移概率矩阵P为________________.

二、 (8分)保险公司的理赔次数$N(t)$是强度为λ的泊松过程，诸次理赔额$C_i(i\geqslant 1)$为独立同分布，且与$N(t)$独立，$EC_i=\mu$. 又设W_i 为第i次理赔发生的时间$(i\geqslant 1)$，则到时刻t为止的理赔总额的折现值为：

$$C(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}$$

其中$\alpha>0$为折现率，试求$C(t)$的期望值.

三、 (20分)质点在一正N边形$(N\geq 3)$的周边上作随机游动(顶点$1,2,...,N$按顺时针方向排列)，质点以概率p顺时针游动一格，以概率$q=1-p$ 逆时针游动一格，试用一马氏链$\{X_n, n\geqslant 0\}$描述该模型，并

(1)写出该马氏链的转移概率矩阵P，并作状态分类；

(2)求出该马氏链的平稳分布；

(3)该马氏链是否存在极限分布？为什么？

四、 (20分)设马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的转移概率矩阵为:

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)试对该马氏链作状态分类(分为几类、各类的周期性、常返性、正常返性等);

(2)试求过程从状态k出发而被状态4吸收的概率$f_{k,4}$及$f_{k,5}$, $(k=1,2,3)$.

五、 (15分)考察下列函数$S_i(\omega), (\omega\in R)$：

$$S_1(\omega)=\frac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega+1)^2},\qquad S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6},\qquad S_3(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3},$$

$$S_4(\omega)=\frac{\omega^2-4}{\omega^4+4\omega^2+3},\qquad S_5(\omega)=\frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+2}(i=\sqrt{-1}),\qquad S_6(\omega)=\frac{4a\cos\omega}{\omega^2+a^2}(a>0).$$

(1) 问哪些可以作为平稳过程的谱密度函数？并进而求出其对应的协方差函数$R(\tau)$.

(2) 问相应的平稳过程的均值是否有遍历性？为什么？

六、 (7分) 设

$$X_t = S_t + \varepsilon_t = b\cos(\omega t + U) + \varepsilon_t,\quad t\in\mathbb{Z}$$

其中$U\sim$U$(0,2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, 方差为σ^2的白噪声序列, U与$\{\varepsilon_t\}$独立. 作矩形窗滤波, $M>0$:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} X_{t-j}$$

1)试问Y_t是平稳过程吗？为什么？

2)求出Y_t的方差.

随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2019 年 6 月 24 日）

一、（30 分）

（1）（每空 2 分）：a.（ 非 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d. （ 是 ）；e.（是）。

（2）（每空 2 分）：a.（非 ）； b.（ 非 ）；c.（是 ）；d.（是）。

（3）（每空 3 分）（ $\frac{\lambda t}{\mu}$ ）；（ $\frac{\lambda t(2+\lambda t)}{\mu^2}$ ）；（ $\exp(\frac{\lambda ts}{\mu-s})$ ）。

（4）（3 分）（ $P = \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ）

二、（8 分）

$EC(t) = E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i} \mid N(t)\right]\right\} = \frac{\lambda\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha}$ 。

三、（20 分）

（1） $P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ N-2 \\ N-1 \\ N \end{array}\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$，（双随机）

不可约、正常返、周期为 2（N 偶）或非周期（N 奇）。

（2）求解：$\pi = \pi P, \sum_j \pi_j = 1$，由：

$$\begin{cases} \pi_1 = q\pi_2 + p\pi_N \\ \pi_2 = p\pi_1 + q\pi_3 \\ \cdots \\ \pi_{N-1} = p\pi_{N-2} + q\pi_N \\ \pi_N = q\pi_1 + p\pi_{N-1} \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_N \end{cases}$$

解得平稳分布：$\pi = (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$

（3）当 N 为奇数时，极限分布存在：$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{N}, (1 \le i, j \le N)$，否则不存在。

四、（20 分）

（1）每个状态自成一类。1,2,3 均为瞬过类，其中 1 的周期为无穷，其余为非周期；4,5 为遍历类（吸收态）。

（2）设 T 为过程进入吸收态 4 或 5 的时间，则

$f_{k,4}=P\{X_T=4\mid X_0=k\}$，$f_{k,5}=P\{X_T=5\mid X_0=k\},(k=1,2,3)$ 其中：

$$f_{1,4}=\sum_i P\{X_T=a\mid X_1=i\}p_{1,i}=0.6f_{2,4}+0.2f_{3,4}+0.1$$
$$f_{2,4}=0.3f_{2,4}+0.4f_{3,4}+0.2$$
$$f_{3,4}=0.2f_{3,4}+0.4$$

解得：$f_{1,4}=\frac{19}{35}$，$f_{2,4}=\frac{4}{7}$，$f_{3,4}=\frac{1}{2}$。类似可求得：$f_{1,5}=\frac{16}{35}$，$f_{2,5}=\frac{3}{7}$，$f_{3,5}=\frac{1}{2}$。

五、（15 分）

（1）$S_2(\omega)$ 是谱密度函数。$S_2(\omega)\leftrightarrow R(\tau)=-\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}|\tau|}+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$。

（2）该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau<\infty$。

六、（7 分）

（1）先求 $EX_t=E(S_t+\varepsilon_t)=0$，

$$\gamma_X(t,t)=E(S_t+\varepsilon_t)^2=E(S_t^2+\varepsilon_t^2)=ES_t^2+\sigma^2=E[b^2\cos^2(\omega t+U)]+\sigma^2$$
$$=\frac{b^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(2\omega t+2u)+1]du+\sigma^2=\frac{b^2}{2}+\sigma^2$$

$$\gamma_X(t+\tau,t)=EX_{t+\tau}X_t=\frac{b^2}{2}\cos\omega\tau+\delta(\tau)\sigma^2,\ (:\delta(\tau)=\begin{cases}1 & \tau=0\\ 0 & \tau\neq 0\end{cases})$$

从而：$EY_t=0$ 且：
$$\gamma_Y(t+\tau,t)=EY(t+\tau)Y(t)=\frac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i,j=-M}^{M}EX_{t+\tau-i}X_{t-j}$$
$$=\frac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i,j=-M}^{M}(\frac{b^2}{2}\cos\omega(\tau-i+j)+\delta(\tau-i+j)\sigma^2)$$

故 Y_t 平稳。

（2）
$$\gamma_Y(t,t)=\frac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i,j=-M}^{M}(\frac{b^2}{2}\cos\omega(i-j)+\delta(i-j)\sigma^2)$$
$$=\frac{1}{(2M+1)^2}(\sum_{i,j=0}^{2M}\frac{b^2}{2}\cos\omega(i-j)+(2M+1)\sigma^2)$$
。

（完）

中国科学技术大学

2019-2020 第一学期期末考试题

考试科目：随机过程（B） 得分：______

学生所在系：______________ 姓名：___________ 学号：___________

（2020 年 1 月 6 日，半开卷）

一、(30 分，每空 2 分) 判断是非与填空:

（1）设 $X_0=0,\ X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\ (n\geq 1)$，其中 $\{\xi_i,\ i\geq 1\}$ 为 i.i.d.，且 $P\{\xi_i=-1\}=$

$=P\{\xi_i=1\}=0.5$，则 $\{X_n,\ n\geq 0\}$ 为:

$a.$ 独立增量过程 （ ）； $b.$ 平稳独立增量过程 （ ）;

$c.$ 正常返马氏链（ ）； $d.$ 瞬过马氏链 （ ）； $e.$ $\lim_{n\to\infty}P\{X_n=0\}=0$。

（2）下列函数是否为平稳过程的谱密度函数:

$a.\ S_1(\omega)=\frac{\omega^2-16}{\omega^4+11\omega^2+18}$ （ ）； $b.\ S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$ （ ）；

$c.\ S_3(\omega)=\frac{\omega^2\cos\omega}{\omega^4+1}$ （ ）； $d.\ S_4(\omega)=\frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2+a^2},(i=\sqrt{-1})$ （ ）

（3）到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程，且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为（ ），第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了 k 封正常邮件的概率为（ ）。

（4）设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，命 $X_T=\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，则:

$E(X_T)=($ $)$，$Var(X_T)=($ $)$。

（5）到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t)=2+t/2$ 的非齐次泊松过程，若该商店早上 8:00 开门，则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为( )，午时段到达商店的平均人数为( )。

二、（**15 分**）设某种健康险投保者中的出险人数 $N(t)$ 为一强度为 5 的泊松过程，若以 Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿，并假定 $Y_i\sim U(1,3)$（均匀分布，单位：万元），且 $\{Y,i\geq 1\}$ 为 i.i.d.，试求到时刻 t 为止保险公司应付全部赔偿 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$ 的期望 $EX(t)$、方差 $Var[X(t)]$ 及矩母函数 $g_{X(t)}(s)$。(均匀分布矩母函数： $g(s)=\frac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$)

三、（**18 分**）圆周上有 1,2,3,4 四个位置按顺时针方向排列，一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置，若以 $X_n = j$ 表示时刻 n 粒子处于位置 j ($j=1,2,3,4$)，则 $\{X_n, n\ge 0\}$ 为一马氏链，

（1）求该马氏链的转移概率矩阵 P 及 $P^{(2)}$，并求 $P\{X_{n+3}=3, X_{n+1}=1 \mid X_n = 2\} = ?$

（2）讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$；

（3）极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ 是否存在？为什么？

四、（**12 分**）设 $\{X_n, n\ge 0\}$ 为区间 $[0,3]$ 上的随机游动，其转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试求粒子由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k,（$k=1,2,3$）。

五、**(15 分)**设 A 与 Θ 独立， $A \sim Exp(1/3)$ (指数分布)， $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ (均匀分布)，定义随机过程：

$$X(t) = A\cos(t+\Theta), \quad (t \in R)$$

（1）证明 $\{X(t),\ t\in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、（**10 分**）设平稳过程 $X = \{X(t),\ t \in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

（1）试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2020 年 1 月 6 日）

一、（30 分，每空 2 分）

（1）a.（ 是 ）； b.（ 是 ）； c.（ 是 ）； d.（ 非 ）；e.（ 是 ）。

（2）a.（ 非 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d.（ 非 ）。

（3）（ $1/12$ ），（ $(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^k$ ）。

（4）（ $\lambda T/2$ ），（ $\lambda T/3$ ）。

（5）（ $e^{-8} \approx 0.0003$ ），（ 8 人）。

二、（15 分）

$$EX(t) = EN(t)EY = \lambda t \times 2 = 10t(\text{万元}),$$

$$\begin{aligned} VarX(t) &= EN(t)VarY + VarN(t)(EY)^2 \\ &= 5t \times 4/12 + 5t \times 4 = 65t/3, \end{aligned}$$

$$g_{X(t)}(s) = e^{\lambda t(g_Y(s)-1)} = e^{5t(\frac{e^{3s}-e^{s}-2s}{2s})} 。$$

三、（18 分）

（1）
$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{(2)} = P^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\} = \\ & = P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\} P\{X_{n+3} = 3 \mid X_n = 2, X_{n+1} = 1\} \\ & = p_{21} p_{13}^{(2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} 。 \end{aligned}$$

（2） 求解：
$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}(\pi_2 + \pi_4) \\ \pi_2 = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_3) \\ \pi_3 = \frac{1}{2}(\pi_2 + \pi_4) \\ \pi_4 = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_3) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$
，易得： $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 1/4$；

状态分类：不可约、正常返、周期为 2。

（3） $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$ 不存在。例如：$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(2n)} = \frac{2}{\mu_i} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$，但 $p_{ii}^{(2n-1)} \equiv 0,$（$\forall n \geq 1$），故

极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ 不存在。

四、（12 分）

设 $T = \min\{n : n \geq 0, X_n = 0\}$ ，则：

$p_k = P\{X_T = 0 \mid X_0 = k\}, v_k = E(T \mid X_0 = k), (k = 0,1,2,3)$，其中：$p_0 = 1, v_0 = 0$，

由 P 有：

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2 \\ p_2 = \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} p_3 \\ p_3 = p_2 \end{cases}，\text{及}\begin{cases} v_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \frac{1}{3}(v_2 + 1) \\ v_2 = \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \frac{1}{3}(v_2 + 1) + \frac{1}{3}(v_3 + 1) \\ v_3 = v_2 + 1 \end{cases}$$

解得：

$p_k = 1, (k = 1,2,3)$，及：$v_1 = 7, v_2 = 11, v_3 = 12$ 。

五、（15 分）

$$EX(t) = EAE\cos(t + \Theta) = 3 \times 0 = 0,$$

（1）$\gamma_X(t+\tau, t) = EX(t+\tau)X(t) = EA^2 E\cos(t+\tau+\Theta)\cos(t+\Theta)$，

$$= 18 \times \tfrac{1}{2}\cos\tau = 9\cos\tau$$

故 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳。

（2）$R_X(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = 9\pi(\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1))$ 。

六、（10 分）

（1） $S(\omega) = \dfrac{\omega^2 + 3}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 7)} \leftrightarrow R(\tau) = \frac{2\sqrt{7}}{21} e^{-\sqrt{7}|\tau|} - \frac{1}{12} e^{-2|\tau|}$；

（2） 该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$ 。

（完）

中 国 科 学 技 术 大 学

2020—2021学年第二学期期末试卷

考试科目 随机过程B　　得分 ____________

所在系 ________　姓名 ____________　学号 ____________

考试时间: 2021年7月5日8:30—10:30

一. (30分) 是非填空选择题(答案请写在答题纸上):

1. (10分) 判断下列有关离散时间Markov链说法正确与否.

1). 具有平稳增量的随机序列是Markov链. (　　)

2). 若两个状态不互达，则它们有可能都是常返的. (　　)

3). 若有无穷个状态且不可约，则所有状态不可能都是常返的. (　　)

4). 若某个状态是常返的，则过程至少会到达它一次. (　　)

5). Markov链中，周期为无穷大的状态一定是非常返的.(　　)

2. (3分) 设$\{N_t, t \geq 0\}$ 是强度为λ的Poisson过程, 非负随机变量T与$N(t)$独立且$P(T > t) = \exp\{-\mu t\}, \mu, t > 0$, 则对$k \geq 0$, $P(N(T) = k) =$______________.

3. (3分) 下列说法不正确的是______________.

A. Poisson过程是Markov过程　　B. 从常返态出发只能到达常返态

C. Poisson过程是平稳过程　　D. 有限状态的MC一定存在正常返态.

4. (4分) 设更新过程$\{N(t)\}$的第n个更新间隔$X_n \sim \exp(\mu)(n \geq 1, \mu > 0)$, 即$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$, 此处$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, 则$S_n$的分布密度函数为$f_{S_n}(x) =$ ______________, 概率$P(N(t) = n) =$______________$(n \geq 0)$.

5. (3分) 下列说法正确的是______________.

A. $\{N(t)\}$与$\{M(t)\}$ 是Poisson过程, 则$N(t) + M(t)$也是Poisson过程.

B. 若到达的车辆数服从Poisson过程, 每间隔一辆车记录一下, 则被记录下的车辆数也服从Poisson过程.

C. $R(\tau) = |\tau| e^{-\tau^2/2}$有可能成为某个平稳过程（或序列）的协方差函数.

D. 初始分布为平稳分布的Markov链为严平稳过程.

6. (3分) 设 $\{X(t)\}$ 为 Gauss 平稳过程, 均值为零, 功率谱密度 $S(\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$。则 $X(t)$ 落在区间 $[0.5, 1]$ 中的概率为______________.

7. (4分) 某种粒子按强度为λ 的泊松过程来到一个计数器，每个到达的粒子都使计数器关闭一段时间r. 当一个粒子到达时，若计数器未处于关闭状态，它就被记录下来。则在时间区间$(t, t+r]$ 中记录到一个粒子的概率为_________$(t \geq r)$.

装……订……线

二. (12分) 某网站负责某项职业考试的网上报名工作，该项考试共有A、B、C三门课程，考生中报考这三门课程的考生所占的比例分别为35%、40% 和25%, 而三门考试的报名费分别为30元、30元和50元. 设考生按速率为λ的泊松过程到该网站报名，其中$\lambda = 10$人/天, 若以$X(t)$ 表示到第t 天为止该网站收到的报名费总额，试求$X(t)$ 的期望$EX(t)$ 、方差$Var(X(t))$ 和矩母函数$g_{X(t)}(\mu) = Ee^{\mu X(t)}$。

三. (15分) 市场上有a 种牌号的牙膏，记为$\{1, 2, \ldots, a\}$. 假定消费者相继使用的牙膏牌号构成马氏链，选用第i 种牌号牙膏的消费者继续使用第i 种牌号牙膏的概率为$p_{i,i}, (0 < p_{i,i} < 1, i = 1, 2, \ldots, a)$. 若他对原来使用的牙膏不满意, 就在其它$a - 1$ 种牙膏中任选一种, 即有: $p_{i,j} = \frac{1-p_{i,i}}{a-1}, (j \neq i)$,

(1) 试写出该马氏链的转移概率矩阵P 并对马氏链作状态分类;

(2) 试求长时间后第i 种牌号牙膏的市场占有率$\pi_i, (i = 1, 2, \ldots, a)$.

四. (15分)设一质点在正整数点上做随机游动, 质点处于正整数点i时，以概率p_i往右走一格，概率$1 - p_i$退回到点1, $p_i = e^{-\frac{1}{i}}$, $i = 1, 2, \ldots$. 记X_n表示时刻n质点所处的位置,

(1) 写出过程的状态空间, 说明该过程为Markov链.

(2) 讨论该各状态的周期性和常返性。

五. (16分)设$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是均值为0的平稳过程，令$Y(t) = X(t)\cos(\omega_0 t + \Theta)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中ω_0 是实常数, $\Theta \sim U[0, 2\pi]$, 且$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 与Θ 相互独立, $R_X(\tau)$ 和$S_X(\omega)$ 分别是$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的协方差函数和功率谱密度. 试证:

(1) $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是平稳过程，且协方差函数

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau)\cos\omega_0\tau.$$

(2) $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{4}\left[S_X(\omega - \omega_0) + S_X(\omega + \omega_0)\right].$$

六. (12分) 已知平稳过程$\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 7\omega^2 + 12}, -\infty < \omega < \infty$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数$R(\tau)$;

(2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?

线

封

密

中国科学技术大学

2021–2022 学年第二学期期末试卷

考试科目____随机过程 B____ 得分________

所在系________ 姓名________ 学号________

考试时间:2022 年 6 月 14 日 8:30–10:30

一、（30 分）是非填空选择题 (答案请写在答题纸上):

1. (10 分）判断下列有关离散时间 Markov 链说法正确与否.

1). Poisson 过程是平稳过程也是连续 Markov 链.(　)

2). 在直线上简单对称的随机游动所有状态都是零常返的.(　)

3). 一个有限状态的 Markov 链一定存在平稳分布.(　)

4). 若 Markov 链某个状态是吸收态，则过程最终会停留在这个吸收态.(　)

5). Gauss 平稳过程一定是严平稳过程.(　)

2. (4 分）某加油站红、银、白三种汽车到达过程分别为强度 1、3、5（辆/10 分钟）的 Poisson 过程，则第一辆车的到达的平均时间为________. 第一辆白车到达前恰好有 k 辆非白车到达的概率为________$(k \geq 0)$.

3. (4 分）下列可以成为某平稳过程的谱密度函数是________.

A.$S(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$　　B.$S(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3}$

C.$S(\omega) = \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+2}(i = \sqrt{-1})$　　D.$S(\omega) = \frac{\cos\omega}{\omega^2+2}$

4. (4 分）已知实平稳过程 $\{X(t)\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 25 + 4/(1 + 6\tau^2)$，并且满足 $\tau \to \infty$ 时，$X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 独立，则 $\{X(t)\}$ 的均值为________，方差为________.

5. (4 分）下列说法正确的是________.

A. 平稳独立增量过程一定是平稳过程.

B. 只要存在正常返类，离散时间的 Markov 链一定存在平稳分布.

C. 极限分布和平稳分布均存在则一定相同.

D. 有限状态的 Markov 链一定是遍历的 Markov 链.

6. (4 分）若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一平稳独立增量过程，则________

A.$\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Poisson 过程　　B.$\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Markov 过程

C.$\{X(t), t \geq 0\}$ 是平稳过程　　D.$\{X(t), t \geq 0\}$ 是严平稳过程

二、（15 分）设某个服务系统只有一个服务器，从早上 8:00 开始接受服务，此时已有无数顾客在进行排队。每次只能服务一个顾客，服务的平均时间为 20 分钟，且每次服务的时间

为独立同分布的指数分布，$N(t)$ 表示从 8:00 后 t 时间内服务的顾客数。求

(1) 上午 8:00 到 12:00 的平均服务顾客数.

(2) 这段时间内服务完的顾客停留的平均时间.

三、 (15 分) 市场上三种品牌的牛奶 (1,2,3) 在某一地区的市场占有率开始时均为 1/3，而每过一个季度后顾客的消费倾向发生改变，我们用一个三状态的 Markov 链来描述，其一步转移概率的均值为

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) 半年之后三种牛奶的市场占有率为多少?

(2) 从状态 2 到状态 3 的平均首达时间是多少?

(3) 各品牌牛奶市场占有率最终会稳定于什么样的比例?

四、 (15 分) 从数 $1, 2, \ldots, N$ 任取一个数作为 X_1，对 $n > 1$，从 $1, 2, \ldots, X_{n-1}$ 中任取一个数作为 X_n，则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一 Markov 链.

(1) 写出 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(2) 对该 Markov 链进行状态分类 (几个等价类，周期性，是否常返，正常返等)

(3) 极限 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^{(n)}$ 是否存在? 为什么.

五、 (10 分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值函数为 0，谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 6}{\omega^4 + 8\omega^2 + 15}, -\infty < \omega < +\infty,$$

求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

六、 (15 分) 设 $X(t) = A\sin(t + \Phi), -\infty < t < +\infty$，其中 A 与 Φ 是相互独立的随机变量，且 $P(\Phi = \pi/4) = 1/2, P(\Phi = -\pi/4) = 1/2$，$A$ 服从区间 $(-1, 1)$ 内的均匀分布，讨论

(1) $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的平稳性.

(2) $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值遍历性。

中国科学技术大学

2022–2023 学年第一学期期末试卷

(回忆版，表述无法完全复现原卷)

考试科目 随机过程 B 得分____

所在系____ 姓名____ 学号____

考试时间:2023 年 2 月 27 日 8:30–10:30

一、

1. $\{N_1(t), N_2(t)\}$ 是遵循 λ_1, λ_2 的相互独立的 Poisson 过程, 判断以下是否正确.
   (1)$N_1(t) - N_2(t)$ 是 Poisson 过程 (2)$N_1(t) + N_2(t)$ 是 Poisson 过程 ( )
2. 对于一个不可约遍历的马尔可夫链, 以下说法正确的是:
   (1) 其平稳分布和极限分布都存在 ( ) (2) 其平稳分布必定是极限分布 ( )
3. 下列随机过程一定属于宽平稳的是:
   A. 马尔可夫链 B. 严平稳过程 C. 泊松过程 D. 白噪声过程
4. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, 且 $X_i \sim Exp(\lambda)$, 则 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 是____ 分布.$\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 是____ 分布.
5. $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}$ 分别遵循参数为 $2, 3$ 的 Poisson 过程, 且相互独立. 则在 $\{N_1(t)\}$ 任意两个相邻事件之间,$\{N_2(t)\}$ 恰好发生 k 次的概率为____.

二、 $\{N(t)\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程,$Y(t) = (-1)^{N(t)}X$,X 是一个随机变量, 且 $P(X = -a) = P(X = a) = \frac{1}{4}, P(X = 0) = \frac{1}{2} \quad (a > 0)$. 问 $Y(t)$ 是否是宽平稳过程, 给出判断和依据.

三、 科大东区地铁站以 5 人/分钟的强度到达, 设每两趟地铁间隔恒为 20 分钟.

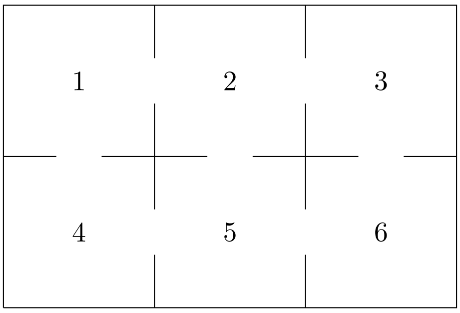
1. 在两趟地铁相邻的 20 分钟内, 问到站人数的分布.
2. 在地铁离开后的 10 分钟时间段内, 求到站乘客等待总时间的期望.
3. 在地铁到达前的 10 分钟时间段内, 求到站乘客等待总时间的期望.

四、 某 Markov 链有以下转移概率矩阵:

$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}
$$

1. 若 Markov 链的初始分布为 $P(X_0 = 1) = 0.2, P(X_0 = 2) = 0.5, P(X_0 = 3) = 0.3$, 求转移两步之后为状态 2 的概率.
2. 求该 Markov 链的平稳分布, 和平均常返时.

五、 小鼠在以下迷宫内游走,1 位置有食物,6 位置有捕鼠夹. 每个单位时间小鼠移动一步, 并且往每个出口方向移动的概率相同.



1. 试写出小鼠位置的转移概率矩阵.
2. 求小鼠从 i 位置出发, 最终吃到食物的概率 $p_i \quad (i=2,3,4,5)$
3. 求小鼠从 i 位置出发, 最终在吃到食物前被捕鼠夹捕捉的概率 $q_i \quad (i=2,3,4,5)$

六、 $\{X_t, t>0\}$ 为均值为 0 的高斯过程, 其功率谱密度函数为 $S(\omega)=\dfrac{4}{\omega^2+4}$

1. 试求该高斯过程的分布.
2. 若 $Y=X_t-X_s \quad (s<t)$, 求 Y 的方差.

参考答案

一. 1. 判断是非题

1) a. 错　b. 对　c. 错.

2) a. 错　b. 对　c. 对　d. 对.

3) a. 错　b. 错　c. 对.

2. 5/9, 20分钟.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{41}{150} & \frac{34}{75} & \frac{41}{150} \end{pmatrix}$,　$(\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{3}{11})$.

4. $\frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$,　$\frac{1}{4}(\cos\tau - \sin(\tau + 2t))$.

二. 1) $E[Y(t)] = \frac{\lambda t}{\mu}$,　$Var[Y(t)] = \frac{2\lambda t}{\mu^2}$,　$\phi_t(s) = e^{\frac{\lambda ts}{\mu - s}}$.

2) $\frac{1+\mu\alpha}{\lambda}$.

三. (1) 转移矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{i+2} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{i+1}{i+2} & \dots \end{pmatrix}$$

(2)所有状态均互达(不可约)；非周期；零常返

因为$f_{00}^{(n)} = \frac{1}{n\times(n+1)}$，所以

$$f_{00} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} f_{00}^{(m)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(m+1)\times m} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\times n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)} = \infty$$

(3)没有平稳分布(零常返类)

四. (1)转移矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{a-1}{a} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{a-2}{a} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{a-1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

每个状态各为1类：$\{0\},\{1\},\ldots\{a-1\}$为瞬过, $\{a\}$为正常返；$\{0\}$的周期为$+\infty$, 其余状态周期为1。

(2)$\{a\}$为吸收态.

(3)$E[T]=a(\frac{1}{a}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\cdots+1)$.

五. (1)均值为0: $E[X(t)]=0$;

协方差函数仅与时间间隔有关: $R_X(\tau)=e^{-|\tau|}\cos(w\tau)$;

二阶矩有限: $E[X(t)]^2=1<\infty$.

(2)因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}|R_X(\tau)|d\tau=2<\infty,$$

根据课本推论4.1, 均值遍历性成立,

六.

$$S_X(w)=\frac{\alpha}{\alpha^2+(w+\beta)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+(w-\beta)^2}$$