2022 年新高考全国 I 卷数学**自制答案**

廖子文　洪毓谦[1]

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内;
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填上, 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写;
3. 请按照题号顺序在答题卡的答题区域内作答, 超出答题区域的其他地方答案无效;
4. 作图可先试用铅笔画出，确定后必须用黑色签字笔描黑;
5. 保持卡面清洁、不要折叠、弄破, 不准使用修正带、涂改液、刮纸刀.

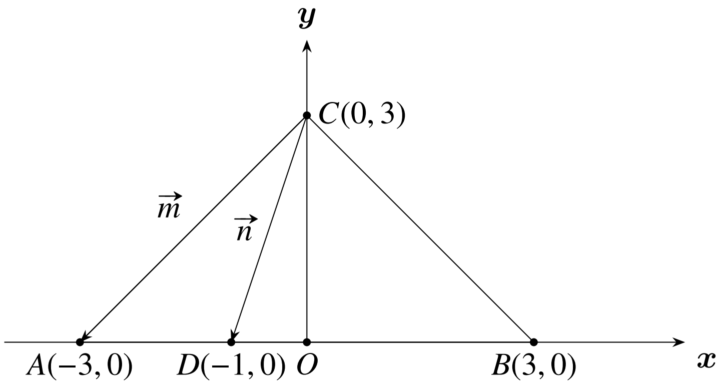
一、选择题: **本题共** 8 **小题**, **每小题** 5 **分**, **共** 40 **分**, **在每个小题给出的四个选项中**, **只有一个选项是符合题目要求的**。

1. 设集合 $M=\{x\,|\,\sqrt{x}<4\}, N=\{x\,|\,3x\geq 1\}$, 则 $M\bigcap N=(\ )$.
   (A) $\{x\,|\,0\leq x\leq 2\}$.　　(B) $\{x\,|\,\frac{1}{3}\leq x<2\}$.
   (C) $\{x\,|\,3\leq x<16\}$.　　(D) $\{x\,|\,\frac{1}{3}\leq x<16\}$.
   答案: D
   解析: $M=\{x\,|\,0\leq x<16\}$, $N=\{x\,|\,x\geq\frac{1}{3}\}, M\bigcap N=\left[\frac{1}{3},16\right)$.

2. 若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\bar{z}=(\ )$.
   (A) -2.　　(B) -1.　　(C) 1.　　(D) 2.
   答案: D
   解析: $z=1+\mathrm{i}, \bar{z}=1-\mathrm{i}, z+\bar{z}=2$

3. 在 ΔABC 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA}=\vec{m}, \overrightarrow{CD}=\vec{n}$，则 $\overrightarrow{CB}(\ )$.
   (A) $3\vec{m}-2\vec{n}$.　　(B) $-2\vec{m}+3\vec{n}$.　　(C) $3\vec{m}+2\vec{n}$.　　(D) $2\vec{m}+3\vec{n}$.
   答案: B
   解析:

[1](原则上)1 ~ 16 题由某廖姓菜比编写,17 ~ 22 题由洪神编写。但最后进行了相互修改 bug 和补充



$$\overrightarrow{AD}=\vec{n}-\vec{m},\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=-2\vec{m}+3\vec{n}$$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5 m 时，相应水面的面积为 $140.0\,\mathrm{km}^2$；水位为海拔 157.5 m 时，相应水面的面积为 $180.0\,\mathrm{km}^2$. 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则将水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时，增加的水量约为 ( )($\sqrt{7}\approx 2.65$)

(A) $1.0\times10^9\,\mathrm{m}^3$. (B) $1.2\times10^9\,\mathrm{m}^3$. (C) $1.4\times10^9\,\mathrm{m}^3$. (D) $1.6\times10^9\,\mathrm{m}^3$.

答案： C

解析： 直接利用棱台体积公式

$$V=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})H=1.436\times10^9\,\mathrm{m}^3$$

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为 ( )

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

答案： D

解析： 直接穷举，$P=\dfrac{3+4+2+3+1+1}{C_7^2}=\dfrac{2}{3}$

6. 记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})+b\,(\omega>0)$ 的最小正周期为 T. 若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$, 且 $y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$=( ).

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3

答案： A

解析：

$$\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi\Rightarrow\omega=\frac{2}{3}k-\frac{1}{6}\quad\frac{2\pi}{3}<T<\pi\xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}}2<\omega<3$$

解得 $k=4$，所以 $f(x)=\sin(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4})+2$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

7. 设 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1},b=\frac{1}{9},c=-\ln0.9$，则 ( ).

(A) $a<b<c$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $a<c<b$

答案： C

解析： 将 a，b，c 的形式统一：$a=\dfrac{1}{10}e^{\frac{1}{10}}$，$b=\dfrac{1}{9}$，$c=\ln\left(1+\dfrac{1}{9}\right)$

$$\frac{a}{b}=\frac{9}{10}e^{\frac{1}{10}}=\left(1-\frac{1}{10}\right)e^{\frac{1}{10}}$$

设函数 $f(x)=(1-x)e^x$，求导得 $f'(x)=-xe^x$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，而 $f(0)=1$，所以 $f(\dfrac{1}{10})=\dfrac{a}{b}<1$，$a<b$.

$$b-c=\frac{1}{9}-\ln\left(1+\frac{1}{9}\right)$$

由不等式 $x>\ln(1+x)\,(x>0)$ 得 $b-c>0$，$b>c$.

$$a-c=\frac{1}{10}e^{\frac{1}{10}}-\ln\left(1+\frac{1}{9}\right)$$

设函数 $g(x)=xe^x-\ln(x+1)$，求导得 $g'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{1}{x+1}$，是一个在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的函数，并且 $g'(0)=0$，所以在 $(0,+\infty)$ 上有 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $g(0)=0$，所以 $g(\dfrac{1}{10})=a-c>0$，$a>c$.
综上，$c<a<b$.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l, 其各顶点都在同一球面上, 若该球的体积为 36π, 且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是 ( )

(A) $\left[18,\dfrac{81}{4}\right]$ (B) $\left[\dfrac{27}{4},\dfrac{81}{4}\right]$ (C) $\left[\dfrac{27}{4},\dfrac{64}{3}\right]$ (D) $[18,27]$

答案： C

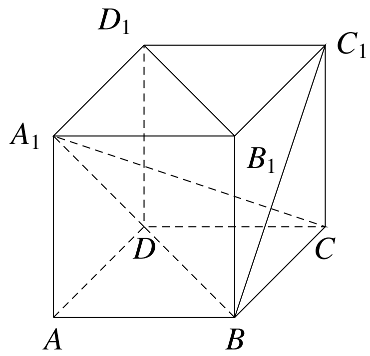
解析： 经分析可得球的半径为 3，设球心为 O，底面是正方形 $ABCD$，中心为 E，正四棱锥顶点为 P，令 $\angle APO=\theta$，于是 $AE=3\sin 2\theta$，$OE=3\cos 2\theta$，正四棱锥体积为 $V=2\times(3\sin 2\theta)^2\times\dfrac{1}{3}\times(3+3\cos 2\theta)=18(1+\cos 2\theta)(1-\cos^2 2\theta),\theta\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}],\cos 2\theta\in[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$.
令 $f(x)=(1+x)(1-x^2)$, 则 $f'(x)=-(3x-1)(x+1)$，$f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{3}$ 处取极大值，在 $x=-1$ 处取极小值. 可知正四棱锥体积的取值范围为 $[\dfrac{27}{4},\dfrac{64}{3}]$.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每个小题给出的选项中, 有多个选项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则 ( )
(A) 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90°
(B) 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
(C) 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45°
(D) 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°

答案： ABD

解析： 经几何直观可以得出 ABD 正确，C 错误.



10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$，则 ( )

(A) $f(x)$ 有两个极值点

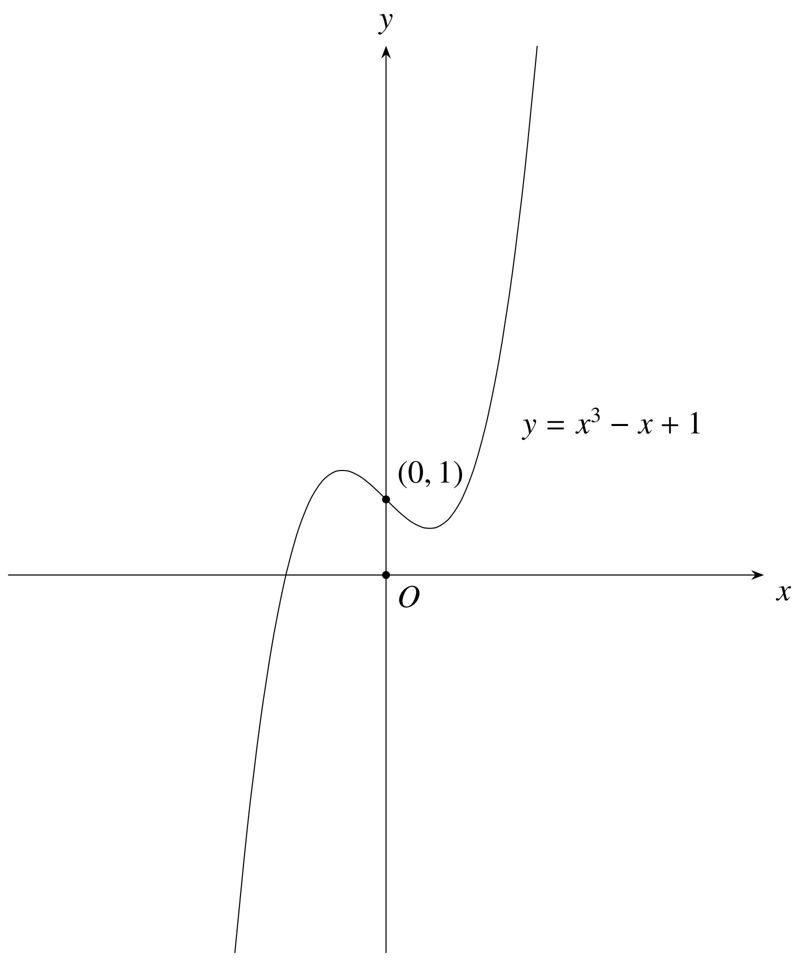
(B) $f(x)$ 有三个零点

(C) 点 $(0, 1)$ 是 $y = f(x)$ 的对称中心

(D) 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

答案： AC

解析：



$f'(x)=3x^2-1$，令 $f'(x)=0$ 解得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$A **正确**.

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3})>0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)<0, f(\frac{\sqrt{3}}{3})>0$ 画出图像 $\Rightarrow$B **错误**.

$f(-x)+f(x)=2=1\times 2$ $\Rightarrow$C **正确**.

令 $f'(x)=2\Rightarrow x=\pm 1, f(-1)=1\neq -2, f(1)=1\neq 2$ $\Rightarrow$D **错误**.

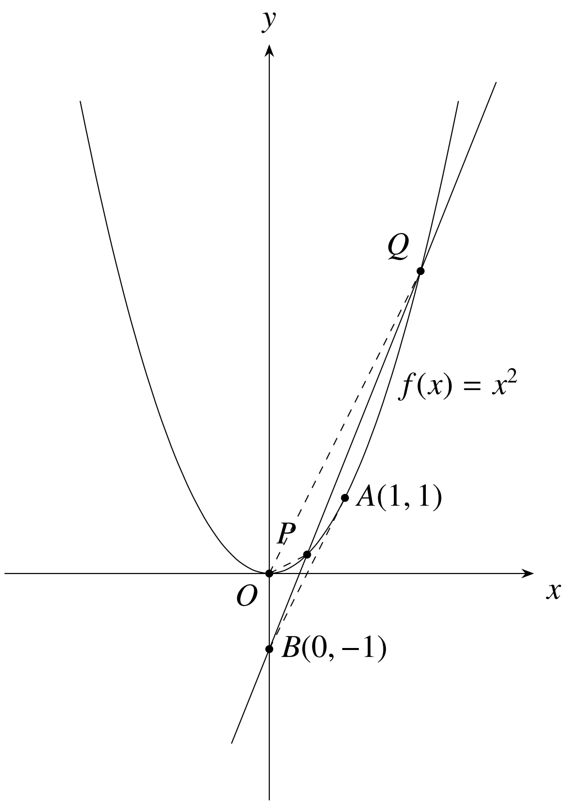
11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P,Q 两点，则 ( )

(A) C 的准线为 $y=-1$　　(B) 直线 AB 与 C 相切

(C) $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　　(D) $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

答案： BCD

解析：



易得 $x^2=y, p=\frac{1}{2}$, 准线为 $y=-\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$A **错误**.

$k_{AB}=2=f'(1)=2$ $\Rightarrow$B **正确**.

$|OA|=\sqrt{2}$, 设 PQ 方程为 $y=kx-1, k\in(-\infty,-2)\bigcup(2,+\infty)$., 联立得 $x^2-kx+1=0$. 设 $P(x_1,x_1^2), Q(x_2,x_2^2)$.

有 $x_1+x_2=k, \quad x_1x_2=1, (|OP|\cdot|OQ|)^2=(x_1^2+x_1^4)\cdot(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_1^4})=2+x_1^2+\frac{1}{x_1^2}\geq 4=(|OA|)^2$, 且当 $k=2$ 时取等号，此时 PQ 与 $y=f(x)$ 相切 $\Rightarrow$C **正确**.

$$
\begin{aligned}
(|BP|\cdot|BQ|)^2 &= (x_1^2+(y_1+1)^2)(x_2^2+(y_2+1)^2) = x_1^2x_2^2+x_1^2(y_2+1)^2+x_2^2(y_1+1)^2+(y_1y_2+y_1+y_2+1)^2 \\
&= x_1^2x_2^2+x_1^2\left(\frac{1}{x_1^2}+1\right)^2+\frac{1}{x_1^2}\left(x_1^2+1\right)+\left(x_1^2x_2^2+x_1^2+\frac{1}{x_1^2}+1\right)^2 \\
&= 1+2\left(x_1+\frac{1}{x_1^2}\right)^2+\left(2+x_1^2+\frac{1}{x_1^2}\right)^2 \\
&\geq 1+2\cdot 2^2+(2+2)^2 \\
&= 25 = |BA|^2
\end{aligned}
$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = 1$ 时 (相切) 时取等号 $\Rightarrow$D **正确**.

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(\frac{3}{2}-2x), g(2+x)$ 均为偶函数，则 ( )
(A) $f(0) = 0$ (B) $g(-\frac{1}{2}) = 0$ (C) $f(-1) = f(4)$ (D) $g(-1) = g(2)$
答案： BC
解析：

方法 1. $f(x)$ 在任何一点的函数值都无法确定 $\Rightarrow$ A **错误**.
由 $f(\frac{3}{2}-2x)$ 为偶函数可知 $f(x)$ 关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称, 所以 $f(-1) = f(4) \Rightarrow$ C **正确**.
$f(x)$ 是以 $x = \frac{3}{2}$ 为对称轴，点 $(2, f(2))$ 为对称中心的函数. 因此 $T = 4\times\left|\frac{3}{2}-2\right| = 2$ 是 $f(x)$ 的一个周期，且由 $f(x)$ 可导得到 $f'(\frac{3}{2}) = g(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow$ B **正确**.
$g(-1)$ 和 $g(2)$ 的关系不能确定 $\Rightarrow$ D **错误**.

方法 2. 由方法 1 推导至 $f(x)$ 是周期函数, 注意到 $f(x)$ 可以取特殊值, 令

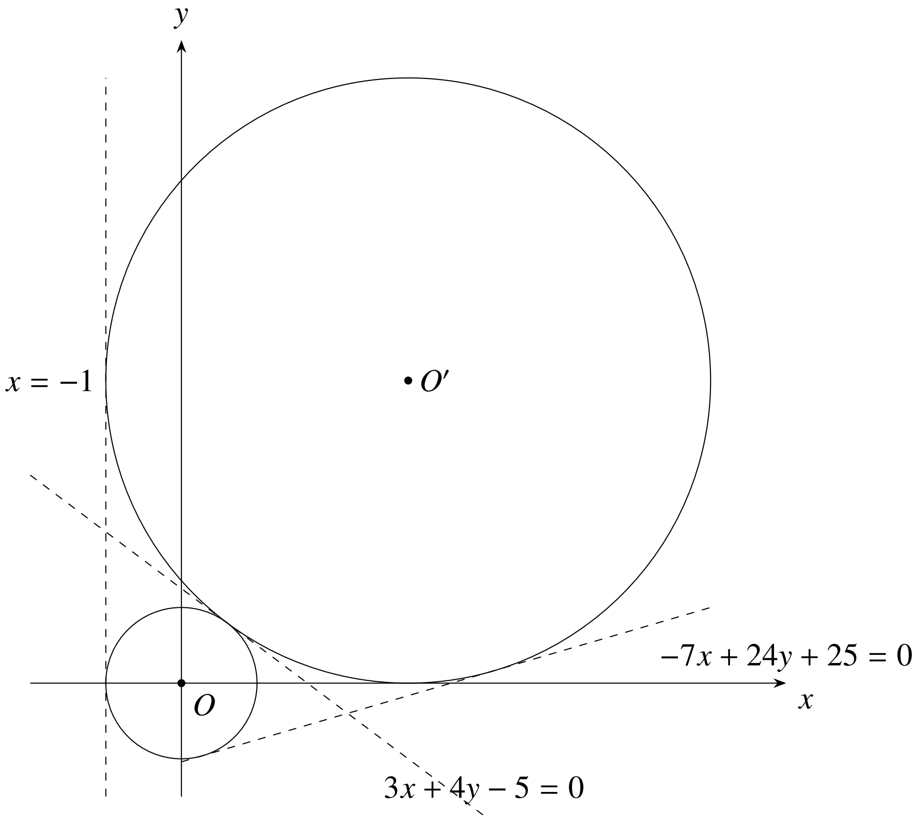
$$f(x) = \sin\pi x + 2,\ g(x) = \pi\cos\pi x$$

验证得到 AD **错误**, BC **正确**.

三、**填空题**: **本部分共** 4 **道小题**, **每个小题** 5 **分**, **共** 20 **分**

13. $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为____(用数字作答).
答案： -28
解析： $C_8^2 - C_8^3 = -28$

14. 写出与圆 $x^2+y^2 = 1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方程____.
答案： $x = -1$ 或 $3x+4y-5 = 0$ 或 $-7x+24y+25 = 0$
解析：



15. 若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是____.

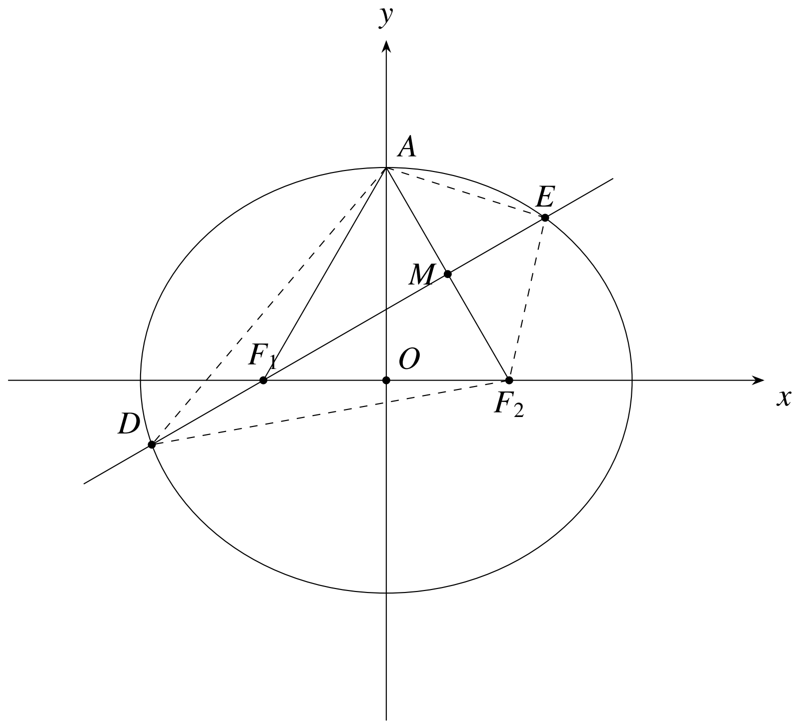
答案： $(-\infty,-4)\bigcup(0,+\infty)$

解析： 对曲线方程求导得 $y'=(x+a+1)\mathrm{e}^x$. 设切线方程为 $y=kx$，切点坐标为 $(x_0,(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0})$，所以由 $k=\dfrac{(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0}}{x_0}=(x_0+a+1)\mathrm{e}^{x_0}$ 可得 $x_0^2+ax_0-a=0$. 由于存在两条切线，所以 $\Delta>0$，解得 $a<-4$ 或 $a>0$.

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. C 的上顶点为 A, 两个焦点为 F_1,F_2. 离心率为 $\frac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D,E 两点，$|DE|=6$, 则 ΔADE 的周长是____.

答案： 13

解析：



由焦点弦长公式得

$$\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}=\frac{2(2c)\cdot(\sqrt{3}c)^2}{(2c)^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})c^2}=\frac{48c}{13}=6\Rightarrow c=\frac{13}{8},\ a=\frac{13}{4}$$

由几何关系得

$$AD=DF_2,\ AE=EF_2, C_{\Delta ADE}=DE+(2a-DF_1)+(2a-EF_1)=4a=13$$

四、解答题: 本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分，第一小题满分 4 分，第二小题满分 6 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=1,\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2.$

解 (1). 由 $a_1=1,\frac{S_1}{a_1}=1$ 且 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列得 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$,

于是 $S_n=\left(\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}\right)a_n$. 当 $n\geq 2$ 时,$S_n-S_{n-1}=a_n=\left(\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}\right)a_n-\left(\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}\right)a_{n-1}$,

化简得 $a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$, 所以 $a_n=\frac{n+1}{n-1}\frac{n}{n-2}\cdots\frac{3}{1}a_1=\frac{(n+1)n}{2}(n\geq 2)$.

又发现 $a_1=1$ 符合上式, 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{(n+1)n}{2}$.

(2). 由 (1) 知 $a_n=\frac{(n+1)n}{2}$, 所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{(n+1)n}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

于是 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2.$

18. (本题满分 12 分，第一小题满分 5 分，第二小题满分 7 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边为 a，b，c，已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若 $C=\frac{2\pi}{3}$，求 B;

(2) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

解 (1). 将二倍角公式 $\sin 2B=2\sin B\cos B$，$\cos 2B=2\cos^2 B-1$ 代入条件 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$ 可得 $\sin B=\cos(A+B)$.

而 $C=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\sin B=\cos(A+B)=-\cos C=\frac{1}{2}$，$B=\frac{\pi}{6}$.

(2). 由 $\sin B=\cos(A+B)$ 可知 $A+2B=\frac{\pi}{2}$. 所以

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{c^2}&=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}-2B)+\sin^2 B}{1-\cos^2(A+B)}=\frac{\cos^2 2B+\sin^2 B}{1-\sin^2 B}\\&=\frac{4\cos^4 B-4\cos^2 B+1+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}=\frac{4\cos^4 B-5\cos^2 B+2}{\cos^2 B}\\&=4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5\\&\geq 2\sqrt{4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}}-5=4\sqrt{2}-5\end{aligned}$$

当且仅当 $4\cos^2 B=\frac{2}{\cos^2 B}$，$\cos B=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ 时 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 有最小值, 为 $4\sqrt{2}-5$.

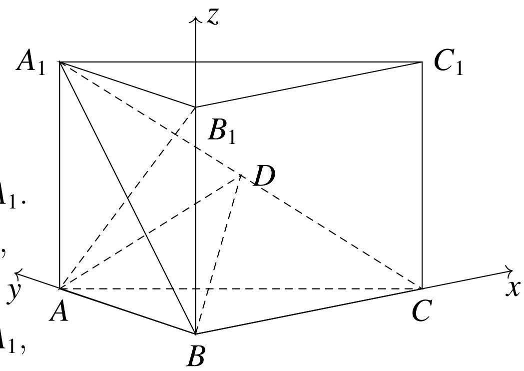
19. (12 分)

如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离.

(2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1=AB$, 平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1, 求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

解 (1). 由题可知 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=4$，$S_{\triangle A_1BC}=2\sqrt{2}$.
而 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=3V_{A-A_1BC}=S_{\triangle A_1BC}\ d$,
所以 A 到平面 A_1BC 的距离为 $d=\sqrt{2}$.



(2). 根据三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱, 有 $AA_1\perp$ 平面 ABC，又 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $BC\perp AA_1$.
连接 AB_1，由于 $AA_1=AB$，四边形 ABB_1A_1 为正方形,
所以 $AB_1\perp A_1B$. 又由于平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，
平面 $A_1BC\bigcap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，$AB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1,
所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC. 根据 $BC\subset$ 平面 A_1BC 就有 $BC\perp AB_1$.
由于 AA_1 与 AB_1 相交于点 A，于是 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1.
不妨设 $AB=a$，$BC=b$，那么 $S_{\triangle A_1BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab=2\sqrt{2}$，$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}a^2b=4$，解得 $a=2$，$b=2$.
如图建立空间直角坐标系：以点 B 为坐标原点，BC 所在直线为 x 轴，BA 所在直线为 y 轴，BB_1 所在直线为 z 轴. 可知:
$\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$.
设平面 ABD 和平面 BCD 的法向量分别是 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则:

$$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases} \text{即} \begin{cases}1x_1+1y_1+1z_1=0\\ 0x_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y_1+0z_1=0\end{cases}$$

得到:$y_1=0$, 令 $x_1=1$, 则 $z_1=-1$, 于是 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,-1)$, 同理:

$$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0;.\end{cases} \text{即} \begin{cases}1x_1+1y_1+1z_1=0\\ 2x_1+0y_1+0z_1=0\end{cases}$$

得到:$x_2=0$, 令 $y_2=1$, 则$z_2=-1$, 于是 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,-1)$

所以，$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

$$=\left|\frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\frac{1}{2}.$$

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

20. (12 分)
一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯 (卫生习惯分为良好和不够良好两类) 的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例 (称为病例组), 同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人 (称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”，$\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项重要指标, 记该指标为 R.

(i) 证明：$R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$

(ii) 利用该调查数据, 给出 $P(A|B)$，$P(A|\bar{B})$ 的估计值, 并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值.

附：$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解 (1).

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200\times(40\times 90-60\times 10)^2}{100\times 100\times 50\times 150} = 24 > 6.635$$

所以有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

(2)(i) 根据条件概率公式 $P(A|B) = P(AB)/P(B)$

$$\begin{aligned} R &= \frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}\Bigg/\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})} = \frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)} \cdot \frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{P(AB)/P(A)}{P(\bar{A}B)/P(A)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})/P(\bar{A})}{P(A\bar{B})/P(\bar{A})} = \frac{P(AB)}{P(\bar{A}B)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(A\bar{B})} = \frac{P(AB)/P(B)}{P(\bar{A}B)/P(B)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})/P(\bar{B})}{P(A\bar{B})/P(\bar{B})} \\ &= \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|B)}{P(A|\bar{B})} \end{aligned}$$

(ii)$P(A|B) = P(AB)/P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$(或0.4)，$P(A|\bar{B}) = P(A\bar{B})/P(\bar{B}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$(或0.1).
$P(\bar{A}|B)$ 和 $P(\bar{A}|\bar{B})$ 的估计值分别为 0.6 和 0.9，则 R 的估计值为

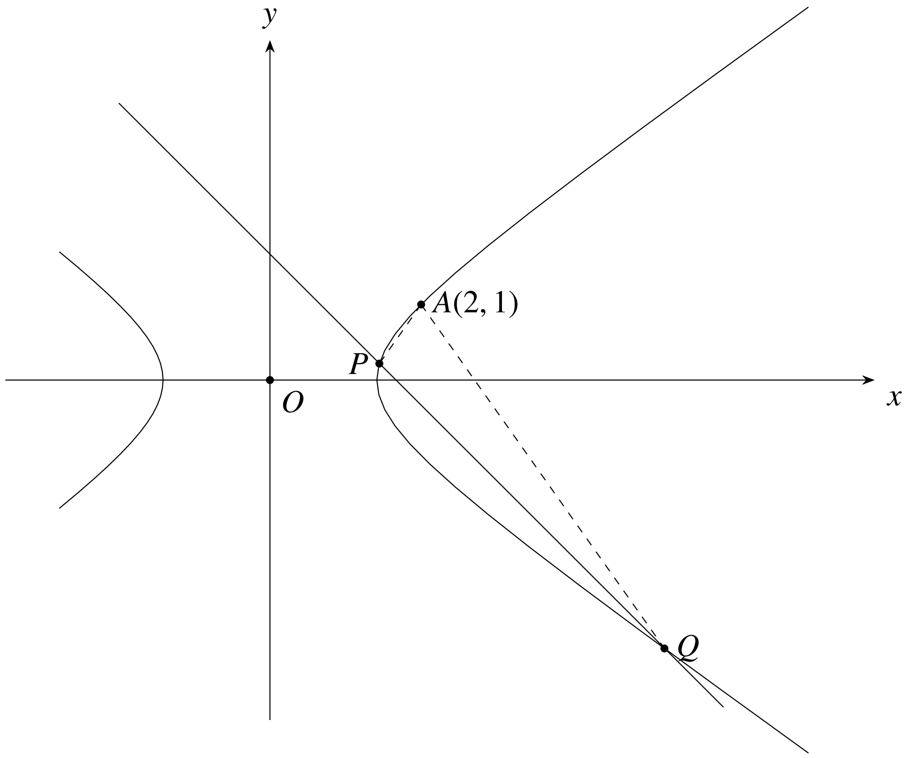
$$R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})} = \frac{0.4\times 0.9}{0.6\times 0.1} = 6$$

21. (12 分)

已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1(a>1)$ 上，直线 l 交 C 于 P,Q 两点，直线 AP，AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan\angle PAQ = 2\sqrt{2}$，求 $\triangle PAQ$ 的面积.



解 (1). 将点 $A(2,1)$ 代入双曲线 C 方程得 $a=\sqrt{2}$，双曲线 C 方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

设直线 $l: y=kx+b$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-y^2=1\\ y=kx+b\end{cases}$ 得 $(2k^2-1)x^2+4kbx+2b^2+2=0$.

由韦达定理得 $x_1+x_2=-\dfrac{4kb}{2k^2-1}$，$x_1x_2=\dfrac{2b^2+2}{2k^2-1}$. 所以

$$\begin{aligned}k_{AP}+k_{AQ}&=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{kx_1+b-1}{x_1-2}+\frac{kx_2+b-1}{x_2-2}\\&=\frac{(kx_1+b-1)(x_2-2)+(kx_2+b-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}\\&=\frac{2kx_1x_2-(2k+1-b)(x_1+x_2)-4(b-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}\\&=0\end{aligned}$$

代入并化简得 $2k^2+kb+k+b-1=(k+1)(2k+2b-1)=0$. 又因为直线不可能经过点 $A(2,1)$，所以直线的斜率 $k=-1$.

(2). 令 $\angle PAQ=2\theta, \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=2\sqrt{2}\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}$

(a) 当 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, k_{AP}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，无解

(b) 当 $\tan\theta = -\sqrt{2}$, $l_{AP}: y = \sqrt{2}x + 1 - 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}x + 1 - 2\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 4\sqrt{2}(1-2\sqrt{2})x + 2 + 2(1-2\sqrt{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_A + x_1 = \frac{4\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}, y_1 = \frac{4\sqrt{2}-5}{3}$$

同理得 $x_2 = \dfrac{10+4\sqrt{2}}{3}$, $y_2 = \dfrac{-4\sqrt{2}-5}{3}$

$\therefore l_{PQ}: y = -x + \frac{5}{3}$, 作 A 与 x 轴平行线交 PQ 于 $M(\frac{2}{3}, 1)$

易得 $S_{\Delta APQ} = \dfrac{1}{2}|AM| \cdot |y_1 - y_2| = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a;

(2) 证明：存在直线 $y = b$，其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

解 (1). 求导得 $f'(x) = e^x - a$，$g'(x) = a - \dfrac{1}{x}$，两个导函数都在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

若 $a \le 0$，则 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 无极小值, 所以 $a > 0$. 于是 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取得最小值 $f(\ln a) = a - a\ln a$，$g(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{a}$ 处取得最小值 $g(\dfrac{1}{a}) = 1 + \ln a$.

由 $a - a\ln a = 1 + \ln a$ 解得 $a = 1$.

(2). 在平面直角坐标系中大致绘出函数图像, 发现如果直线 $y = b$ 两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 有三个不同的交点, 那么直线一定经过曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的交点.

设这三个交点的横坐标分别为 x_1，x_2，x_3，且 $x_1 < x_2 < x_3$，那么可知横坐标为 x_2 的点是曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的交点. 可列出连等式：

$$e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2 = x_3 - \ln x_3 = b$$

观察可知 $x_1 = \ln x_2$，$x_3 = e^{x_2}$.

要想证明这三个交点的横坐标成等差数列, 即证明 $x_1 + x_3 = e^{x_2} + \ln x_2 = 2x_2$.

而由上式易知 $e^{x_2} + \ln x_2 - 2x_2 = 0$，等式得证. 所以存在直线 $y = b$，其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.